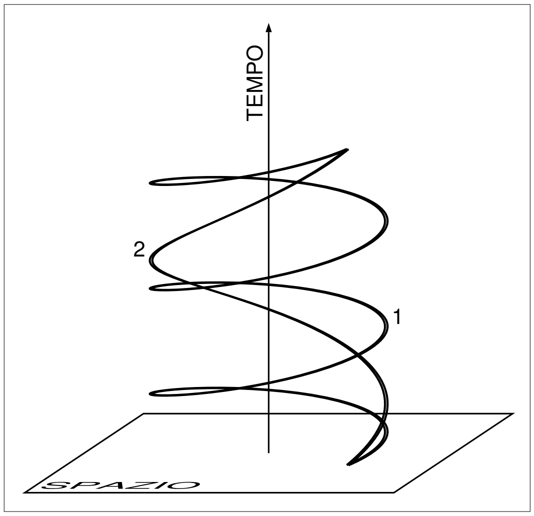
ISSN: 1120-6527



LA FISICA NELLA SCUOLA

Insegnare relatività nel XXI secolo

Dal "navilio" di Galileo all'espansione dell'Universo

Elio Fabri

Quaderno 16

Bollettino trimestrale dell'Associazione per l'Insegnamento della Fisica

Anno XXXVIII n. 2 Supplemento **aprile-giugno 2005**

INDICE

Lezione 13

Lezione 14

Lezione 15

Lezione 16

La figura in copertina (E.F.) rappresenta il diagramma spazio-tempo dell'esperimento di Hafele–Keating.

Premessa

Il Quaderno che qui si presenta discende dagli appunti di una scuola estiva A.I.F., tenuta nel 2000. Scrivevo allora, nella "Premessa":

Gli appunti che seguono sono stati redatti in occasione della Scuola Estiva A.I.F. 2000, e si basano sulle lezioni da me tenute per un corso di aggiornamento al Liceo "Vallisneri" di Lucca in due riprese, negli anni 1996 e 1999. Parte delle lezioni sono state trascritte dalle registrazioni, e di questo ringrazio gli anonimi che hanno contribuito. Per parte mia, ho riveduto e integrato le trascrizioni, e scritto quelle mancanti, basandomi sulle mie scarne tracce. In alcuni casi mi sono servito, con modifiche, del libro "Per un insegnamento moderno della relatività" (*1989*).

La stesura di questi appunti mi ha impegnato abbastanza a lungo, ma non è per me soddisfacente: risente dell'eterogeneità delle fonti, che non ho avuto il tempo di amalgamare e riorganizzare. I cambiamenti rispetto al libro citato sono numerosi: in primo luogo è cambiato l'ordine di esposizione, allo scopo di mostrare meglio l'integrazione fra relatività ristretta e generale. Inoltre nelle lezioni avevo dato molto spazio alle premesse di fisica "classica" necessarie per la relatività, e ho mantenuto questo carattere.

Nonostante siano ormai oltre vent'anni che lavoro sull'insegnamento della relatività, continuo a trovare modifiche da fare alla mia presentazione, anche se la linea conduttrice e i principi di fondo sono rimasti sempre gli stessi. In questi anni ho tenuto numerose lezioni e corsi di aggiornamento, e dal contatto con ragazzi e insegnanti sono andato imparando e continuo a imparare.

Le lezioni di Lucca, che ho ricordato, hanno occupato ben 17 pomeriggi, e la materia trattata va certamente molto al di là di quanto potrebbe trovar posto in un insegnamento secondario, anche con l'orario più favorevole. D'altra parte ho incluso nelle lezioni, e riportato qui, una quantità di commenti didattici; in vari punti ci sono poi approfondimenti pensati per l'insegnante, ma da non trasferire tali e quali agli allievi.

Per le ragioni che ho spiegato, sicuramente saranno presenti errori e forse ripetizioni o lacune. Sarò grato a chi vorrà segnalarmi gli uni e le altre.

Un grazie particolare a Umberto Penco, che ha curato le figure, realizzandole in gran parte ex-novo.

* * *

Nel preparare questo Quaderno mi si è posto un ovvio problema: a distanza di quasi 5 anni, sarà il caso di fare modifiche e/o integrazioni? La risposta è stata facile per una ragione assai concreta: per non ritardare indebitamente la pubblicazione, l'unica era contenere le modifiche al minimo indispensabile.

Ho quindi lasciato invariato il testo, inclusi i riferimenti cronologici: invito perciò il lettore a fare attenzione, ricordando che le lezioni sono state tenute nel secolo scorso: quindi espressioni come "nel secolo passato" non si riferiscono al 20-mo secolo da poco finito, ma al 19-mo, eccetera.

Le uniche modifiche sono le seguenti:

- ho corretto alcuni errori tipografici e qualche minima imprecisione
- ho aggiustato in qualche punto l'italiano, che qua e là risentiva (e forse risente ancora) della forma parlata e colloquiale delle lezioni
- dove era proprio indispensabile aggiornare qualche affermazione, ho inserito una nota a pié di pagina
- ho inserito le figure nel testo.

Modifiche più sostanziali ho dovuto apportare alle lezioni 9 e 10, dove si notavano lacune nell'esposizione.

Una revisione più ampia riguarda invece i problemi. Nella versione 2000 alla fine di alcuni capitoli c'erano dei problemi, e in qualche caso, ma non in tutti, ne davo anche la soluzione (a volte nella forma di discussione coi corsisti di Lucca). Ho ritenuto indispensabile:

a) scrivere le soluzioni di tutti i problemi

b) aggiungere problemi e relative soluzioni dove mancavano.

È forse bene precisare che i problemi non sono intesi come proposte per una classe: qualcuno potrebbe anche servire a questo scopo, ma in buona parte sono troppo difficili. In alcuni casi i problemi sviluppano temi accennati durante la lezione, o esemplificano argomenti discussi. In ogni modo il destinatario dei problemi è il lettore interessato a studiare abbastanza a fondo questo Quaderno.

* * *

Un'altra novità del Quaderno sono le tre appendici.

La prima riproduce un mio vecchio articolo, apparso su *La Fisica nella Scuola* nel 1981, in cui si discute in forma di dialogo la *vexata quæstio* della massa relativistica.

Nella seconda ho ritenuto comodo per il lettore raccogliere varie grandezze e costanti fisiche usate nel Quaderno.

La terza, scritta da Massimo Coluccini, espone sommariamente la sua traduzione di questo lavoro nella pratica didattica al Liceo "Vallisneri." Mi è sembrato utile invitarlo a dare questo contributo, perché sono consapevole delle difficoltà che un insegnante può trovare (e anche delle resistenze che può opporre) a una linea didattica come quella qui proposta. La risposta migliore mi sembra quella di mostrare come *nel concreto* sia possibile realizzarla in classe. Ovviamente non viene proposta come un modello, ma solo come un esempio.

Ringrazio quindi Massimo, e rinnovo i ringraziamenti a Umberto, che anche in quest'occasione non ha fatto mancare la sua collaborazione per migliorare le figure.

Elio Fabri

Pisa, maggio 2005

LEZIONE 1

Introduzione

Cominciamo con due parole sulla motivazione di questo corso. Tema del corso è: insegnare la relatività alle soglie del ventunesimo secolo.

La relatività ha ottant'anni. Non dico novanta, e c'è una ragione precisa: in tutto questo corso, quando parlerò di relatività, non farò la distinzione tradizionale fra relatività ristretta (RR) e relatività generale (RG). E siccome la RG ha preso forma compiuta nel 1916, compie ora ottant'anni.

Ottant'anni sono tanti per una teoria scientifica; quindi che ci sia motivo di cominciare a introdurla nell'insegnamento della fisica, non c'è dubbio. Dei problemi, delle difficoltà, di quello che si può o non si può fare, avremo tempo di parlarne.

La relatività è ormai una scienza matura, consolidata. Fa parte tradizionalmente del sapere scientifico dei fisici di tutto il mondo e per di più è anche ricca di nuove prove sperimentali. Oggi, dal punto di vista delle conferme sperimentali, delle conoscenze che si hanno, degli strumenti, è cresciuta molto, anche rispetto a solo trent'anni fa. Siamo di fronte a un quadro maturo, completo, organico, che dovrebbe dunque diventare parte integrante dell'insegnamento della fisica.

È mia convinzione che si possa insegnare relatività fin dall'inizio del triennio; il corso sarà in larga misura dedicato a dimostrare e illustrare questa tesi. È ovvio che non si può infilare la relatività dovunque si parli di fisica: occorre che la materia abbia un certo respiro, occorre che gli allievi abbiano avuto modo di capire che cosa s'intende per teoria scientifica; occorrono una serie di altre condizioni al contorno, per cui la relatività è certamente materia del triennio. Però badate che dico triennio, non dico ultimo anno. Mi potreste domandare: "In quelle scuole dove la fisica si fa nel biennio, la relatività non si fa?" Credo proprio di no. Ci sarebbe però da ripensare al senso che ha insegnare la fisica solo nel biennio...

Come ho detto, si può insegnare relatività fin dagli inizi del triennio; però per far questo occorre ripensare buona parte della fisica tradizionale. Non si può appiccicare la relatività come un argomento in più, a un certo punto di un corso. In effetti ciò non è vero solo per la relatività. Se allarghiamo il discorso a quella che si chiama — più o meno impropriamente — "fisica moderna," si potrebbe dire la stessa cosa: non si può dare spazio alla fisica di questo secolo semplicemente stringendo un po' il resto. Non solo perché a forza di stringere si rischia che non resti niente, ma anche perché la fisica di questo secolo per essere affrontata richiede anche di ripensare a tutto quello che viene prima. Certe linee tradizionali dell'insegnamento vanno riesaminate, non possono essere mantenute così come sono.

Relatività e scuola secondaria

Le cose che racconterò in questo corso sono il risultato di un lavoro che ormai dura da parecchi anni. Intorno al 1978 ho cominciato a pensare al problema di come si poteva insegnare la relatività nella scuola secondaria, con quali obbiettivi, superando quali difficoltà. Questo lavoro è passato attraverso diverse fasi: corsi d'aggiornamento, lezioni di respiro più breve, discussioni, congressi, lezioni più o meno estese anche a studenti, in qualche caso interazioni con classi di studenti.

Quella che finora è mancata è stata una sperimentazione sistematica sul campo. Dato un progetto didattico, si dovrebbe trovare un certo numero d'insegnanti disponibili con le loro classi, e sperimentare il progetto. C'è una serie di ragioni che spiegano come mai una sperimentazione sistematica, organizzata, non sia mai andata in porto; ma non è questa la sede per parlarne.

Entrando nel vivo della relatività, c'è una spiegazione che debbo dare, a proposito di RR e RG. Innanzi tutto, la RR fa parte — più o meno bene — del bagaglio culturale di un laureato in fisica. Per la RG ancor oggi (un po' meno negli ultimi anni: le cose cominciano a cambiare) la situazione è diversa: è considerata materia che per il lavoro del fisico non serve; poi è complicata, usa una matematica astrusa, ecc. Insomma non fa parte del quadro delle cose che si ritiene debbano entrare nella cultura del laureato in fisica.

Naturalmente questa situazione si ripercuote sul nostro tema: se si deve insegnare la relatività nella scuola secondaria. Sulla RR non c'è discussione: tutti sono d'accordo che ne vale la pena. Ormai credo che tutti i libri di testo abbiano un capitolo sulla RR. Invece la RG no. Se è vista come difficile per chi segue un corso universitario, ancor più si ritiene difficile, per non dire impossibile, trasportarla nella s.s.s.

Uno degli scopi del corso sarà appunto sfatare questa visione della RG come qualcosa d'inaccessibile. E soprattutto insisto sul fatto (e spero che venga fuori come risultato di questo corso) che in realtà la distinzione stessa tra RR e RG non ha alcun senso. È vero che Einstein ha scritto nel 1905 un articolo da cui è nata la RR, mentre la RG è venuta dopo: Einstein ha speso degli anni a svilupparla, e ho già citato il 1916 come data finale. Però questa non è una ragione sufficiente perché la distinzione continui a sopravvivere. Già la distinzione non era così netta, tutto sommato, nella mente di Einstein negli anni che abbiamo detto; ma a maggior ragione non ha da esserlo adesso. Oggi è molto più chiaro che occorre una visione complessiva. Quindi, il messaggio che voglio trasmettervi è che *la relatività è una*: la vecchia distinzione tra RR e RG non ha ragione di essere.

Poi, se qualcuno mi chiede che cos'è questa relatività, per ora vi do una definizione sommaria: la relatività è principalmente *Fisica dello Spazio-Tempo*.

Questa lezione e la successiva saranno dedicate non alla relatività, ma alla fisica dello spazio-tempo prima della relatività; a com'è inteso lo spazio-tempo nella fisica newtoniana. La prima cosa, che si legge dappertutto, è che nella fisica newtoniana spazio e tempo sono *assoluti*. Si dovrà un po' discutere che cosa questo vuol dire, perché la parola "assoluto" ha subito una risonanza filosofica; introduce a un discorso più ampio, di tipo epistemologico, sul significato stesso della fisica.

Ma prima di affrontare questo discorso voglio rimanere un po' coi piedi per terra. Dobbiamo fare attenzione, specialmente visto che stiamo parlando di una fisica della relatività introdotta piuttosto precocemente, a non farci intrappolare in discussioni di tipo filosofico. Sarebbe un pessimo sistema, un modo d'indurre i ragazzi a prendere fischi per fiaschi, e metterli in difficoltà dalle quali non si esce più.

Ragioniamo da fisici: che cos'è lo spazio per un fisico? Ci sono delle misure, ci sono delle osservazioni, che riguardano lo spazio? E il tempo? Che cos'è il tempo per un fisico?

Mi sono accorto che nella tradizione didattica fra la trattazione dello spazio e quella del tempo c'è una certa dissimmetria. Di spazio se ne parla abbastanza, anche da un punto di vista concreto: spesso nel biennio si comincia con le misure di lunghezza, si presentano vari tipi di strumenti, si esamina come si possono misurare le distanze piccole o le distanze grandi... Invece in materia di tempo discorsi di questo genere sono molto meno frequenti. Ed è un guaio, perché se ci si occupa di relatività, la prima cosa in cui ci s'imbatte sono gli aspetti strani, paradossali, che si presentano quando si parla del tempo: i vari paradossi, orologi che vanno d'accordo o no...

La discussione può prendere una piega totalmente diversa a seconda dell'opera d'introduzione, di spiegazione, di chiarificazione delle idee fisiche sul tempo che c'è stata prima. Intendo proprio nel senso che il tempo della fisica non è quella cosa misteriosa dell'intuizione comune, oppure della filosofia. (Come sapete bene, il tempo è stato un campo di ampia discussione per i filosofi, e lo è ancor oggi.)

Per un fisico parlare di tempo significa parlare dei metodi di misura. Quindi, se si vuole trattare di fisica e in particolare di relatività, bisogna dedicare un po' di ... spazio al tempo e alla metrologia del tempo, che invece è spesso un argomento trascurato.

Tempo solare e tempo siderale

La preistoria del tempo comincia con la distinzione tra il giorno e la notte, con l'associazione dei mesi alla Luna e dell'anno alle stagioni. Il mese nasce dalle fasi della Luna; l'anno dall'alternanza delle stagioni, e anche dall'alternarsi delle costellazioni visibili nel cielo notturno.

Strumenti di misura del tempo: si comincia con gli orologi solari (meridiane). Gli orologi solari hanno una serie di caratteristiche che oggi ce li fanno considerare assolutamente inadeguati. In primo luogo permettono di apprezzare al massimo il minuto, a causa della sfumatura dell'ombra. Non serve a niente produrre un'ombra più lunga, perché viene anche più sfumata e non ci si guadagna in precisione. Infatti l'ombra è sfumata (è circondata da una penombra) semplicemente perché il Sole è una sorgente estesa, non puntiforme.

Ma un difetto più grave della meridiana, che pochi conoscono, è che nel corso di un anno essa in certi momenti è avanti, in altri è indietro rispetto al tempo segnato da un orologio di quelli usuali: la differenza può arrivare a un quarto d'ora; anzi, in qualche momento lo supera anche un po'. Il 2 novembre una meridiana è avanti di oltre 14 minuti, mentre l'11 febbraio è indietro più di 16 minuti. Quindi chi si affida a una meridiana fa una misura di tempo che non solo è imprecisa, ma è anche affetta da un errore sistematico, che può variare di mezz'ora dal massimo al minimo.

A questo punto nasce la domanda: come si fa a sapere che una meridiana va avanti o indietro? Naturalmente la risposta è che la si deve confrontare con un orologio migliore. Bisogna che sia un orologio che non abbia anch'esso delle fluttuazioni. Vedete quindi che anche a questo livello così primitivo nasce immediatamente il problema: che cosa significa che un orologio è "migliore" di un altro? che cosa significa che va bene o non va bene?

Vi chiederete perché sto insistendo su queste cose. Perché poi nella relatività non si fa altro che parlare di orologi che si comportano in modo strano; ma se uno non ha capito bene che cosa s'intende quando si parla di un orologio di cui ci si può fidare, che cosa penserà quando sente parlare di orologi che vanno avanti o indietro?

Dopo aver ricordato che le meridiane qualche problema lo davano, avremmo davanti una lunga storia; perciò scavalco alcuni secoli... Si è deciso che un orologio migliore era la rotazione terrestre rispetto alle stelle, cioè guardare non il moto apparente diurno del Sole, che è il colpevole del funzionamento difettoso delle meridiane, ma il moto apparente delle stelle, che in confronto è assai più regolare. Di fatto si misura la rotazione terrestre, in base al sorgere e al tramontare delle varie stelle durante la notte: questo è il punto di partenza del concetto di "tempo siderale" (TS).

Usare il TS equivale a considerare la Terra, nel suo moto rotatorio rispetto alle stelle, come la lancetta di un orologio. Però nell'uso quotidiano il TS non è pratico, e si usa il "tempo solare medio" (TSM). Questo poi, se riferito non al meridiano locale o ad altri meridiani, ma al meridiano di Greenwich, prende il nome di "tempo universale" (TU). Una volta si chiamava "tempo medio di Greenwich," (TMG, o GMT in inglese) ma da parecchi anni il termine è stato sostituito da TU.

Il TU era definito (era, perché poi le cose sono cambiate) a partire dal TS. Il punto di partenza osservativo è il TS: dal moto della Terra rispetto alle stelle si ricostruisce il TU. La differenza è di scala: mentre il giorno solare medio è, come tutti sanno, di 86400 secondi, il giorno siderale è un po' meno: circa 86164 (in realtà il numero è dato con molte più cifre). La cosa importante è che fra i due c'è una differenza di circa 4 minuti: il TS guadagna circa 4 minuti al giorno sul TU. Ecco perché non potrebbe essere usato per la vita pratica: 4 minuti + 4 minuti + ... finisce che l'orologio dice mezzogiorno e invece è notte.

Se fate il conto, vedete che quattro minuti al giorno accumulandosi durante un anno fanno un giorno intero. La ragione è che mentre il TS dà il moto della Terra riferito alle stelle, il tempo solare (quindi il TU) dà il moto della Terra riferito al Sole: c'è un cambiamento di riferimento. La Terra in un anno fa un giro intorno al Sole, e quel giro è il giorno in più del TS rispetto al TU: un anno dura 365 giorni solari (e spiccioli) mentre dura 366 giorni siderali.

Abbiamo dunque deciso che l'orologio è la Terra. Ma la Terra è un buon orologio? Abbiamo tutto il diritto di porci questa domanda, che si può subito riformulare così: la rotazione terrestre è veramente uniforme? Come possiamo dirlo?

Notate che potremmo porci anche una domanda più profonda: uniforme rispetto a che? Risposta: "rispetto al tempo, quello vero." Ma chi ha il tempo, quello vero? Naturalmente dietro a tutti questi discorsi, a questo modo di esprimersi, c'è la fisica newtoniana, nella quale il tempo è quella cosa che scorre uniformemente, ecc. Per dirla con Newton, nei *Principia*:

> "in sé e per sua natura, senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente."

Una volta assunto questo quadro concettuale, ha senso domandarsi se la Terra ruota uniformemente: rispetto al tempo assoluto newtoniano.

Questo dubbio, se il moto della Terra fosse o no uniforme, nacque in effetti prima che ci fosse la prova sperimentale che non lo è; e dal dubbio ebbe inizio una ricerca. Però la domanda è la solita: come si fa a sapere se la rotazione è uniforme oppure no? Non si può usare una meridiana per decidere la questione: bisogna avere un orologio migliore. E soprattutto un orologio indipendente, perché se tutti gli orologi che hanno i fisici sono regolati sul moto della Terra non c'è niente da fare. Occorre un altro orologio, che non sia legato al moto della Terra. E poi bisogna essere convinti che quest'altro orologio è meglio, che possiamo fidarcene di più; altrimenti come facciamo a dare la colpa alla Terra?

Non uniformità della rotazione terrestre

Vi ricordo velocemente la situazione di fatto. Le prove ci sono: è assodato che la Terra non ruota uniformemente. La rotazione terrestre ha due tipi di irregolarità, grosso modo: le irregolarità *periodiche* e quelle che diciamo *secolari*. Questo è un termine preso dal gergo astronomico: si usa per gli effetti che si accumulano nel tempo, per cui, anche se sono piccoli, col passare dei secoli...

L'entità delle fluttuazioni periodiche è piccola: sono dell'ordine del centesimo di secondo. La Terra accelera e rallenta, ma non pensate che il periodo di rotazione cambi di centesimi di secondo: solo in capo a tempi dell'ordine dell'anno, trovate l'orologio Terra alternativamente avanti o indietro di centesimi di secondo. Rispetto a che? Naturalmente rispetto al suo andamento medio. Perché succede questo? Ecco, non vorrei entrare in una spiegazione, perché mi porterebbe via troppo tempo: entrano in gioco effetti di meccanica della rotazione terrestre, e anche questioni di fisica terrestre.

Parliamo invece un po' delle variazioni secolari. Prima di tutto, ecco i dati: dall'inizio del secolo la rotazione terrestre è andata progressivamente rallentando, con fluttuazioni irregolari. Il ritardo cumulativo è di oltre un minuto, dove questo — al solito — non vuol dire che ora il periodo di rotazione è di un minuto più lungo di quello che era un secolo fa. Significa che a forza di rallentare l'orologio Terra è rimasto cumulativamente sempre più indietro, e il ritardo ha superato un minuto. Quindi non è certo piccolo!

Attenzione: non concludete che il periodo si è allungato di quasi un secondo all'anno. Questa è una cosa che vale la pena di capire meglio: non è così semplice come sembrerebbe a prima vista. Vi propongo perciò come problema di descrivere esattamente che cosa significa dire che il rallentamento progressivo della rotazione ammonta a oltre un minuto nell'ultimo secolo.

Quando si è scoperto che la Terra aveva delle irregolarità (non tanto quelle periodiche, che poi sono piccole, ma soprattutto quelle secolari) gli astronomi hanno concluso che non si poteva più ritenerla un buon orologio. Perciò la scala di tempo, e la definizione dell'unità di tempo (il secondo) non potevano più essere agganciate al periodo della rotazione terrestre: si sarebbe costruita un'unità di tempo ... che cambia col tempo (scusate il gioco di parole). Si è trovata quindi una definizione indipendente, che tra poco vedremo, per il secondo, e per la scala di tempo.

Questo però ha fatto nascere un altro problema, di carattere pratico. Noi viviamo sulla Terra: la Terra gira, e causa il giorno e la notte; il sorgere del Sole, gli orari della vita quotidiana, tutto dipende da come gira la Terra, non dal tempo costruito in laboratorio. Come si fa a conciliare le due cose?

Avrete osservato che ogni tanto radio e TV trasmettono dei messaggi misteriosi, espressi in termini incomprensibili (forse perché per primi quelli che li hanno scritti non hanno capito di che cosa stessero parlando). Succede di solito il 31 dicembre: il giorno dopo il TG vi dice: "stanotte gli orologi sono stati fermati per un secondo." Seguono poi frasi come "siamo un secondo più giovani" (o più vecchi? non ho mai capito ...).

Il punto è che ormai la scala del tempo è stabilita da un sistema di orologi campione, che camminano per i fatti loro, ignorando il moto della Terra. Se però continuassimo a segnare il tempo con quegli orologi, a lungo andare troveremmo uno sfasamento rispetto alla rotazione terrestre. Per evitare questo, per convenzione internazionale si è deciso che quando la differenza che si è accumulata è quasi un secondo, un addetto preme un pulsante: sì che gli orologi segnino un secondo di meno, rimettendosi al passo col moto della Terra.

Insomma: occorre fare i conti da un lato con le esigenze scientifiche, dall'altro con quelle pratiche: il tempo che viene distribuito dai segnali orari deve andare abbastanza d'accordo col moto della Terra, però è costruito in base a campioni di laboratorio. Perciò si ricorre a un compromesso: ogni tanto il tempo campione viene fermato per un secondo.

La storiella di Zanzibar

Ma torniamo al problema veramente importante: per scoprire le irregolarità della Terra ci vuole un orologio migliore. C'è una vecchia storiella, detta "di Zanzibar," che aiuta a fissare la natura del problema.

Siamo nell'800, quando non c'era ancora la radio. Le navi, come sapete, avevano bisogno di portarsi dietro degli orologi, per "fare il punto": la misura della longitudine in mare richiedeva l'osservazione delle stelle, ma anche l'uso di un orologio. Quindi per una nave avere un orologio buono, affidabile, era cosa vitale.

Il che, fuori della storiella, mi porterebbe a raccontare dell'importanza che ha avuto, nell'Inghilterra del '6-'700, per lo sviluppo degli strumenti scientifici, quest'esigenza pratica della marina, del commercio, che per gli inglesi era di primaria importanza. L'Ammiragliato britannico nel '700 bandì un premio di 20 000 sterline, che fu vinto da Harrison. Questi aveva inventato il prototipo dei cronometri da marina: un orologio compensato termicamente e montato su sospensione cardanica. Quei cronometri sono ormai un reperto archeologico, dato che il tempo si riceve per radio; ma vi invito a riflettere su quanto abbia influito questa "semplice" innovazione tecnica sullo sviluppo della cosiddetta "civiltà occidentale"...

Torniamo alla storiella. Il capitano di una nave ha il suo bravo cronometro; però a un certo punto gli si ferma, e sono guai. Per fortuna si trova vicino a Zanzibar, un'isola vicina alle coste dell'attuale Tanzania. Così dirige la nave al porto, scende a terra e si mette in cerca di qualcuno che gli dia l'ora esatta, che gli faccia rimettere l'orologio. Chiede notizie, e gli dicono che giù, nella città vecchia, nei vicoli, c'è un vecchio orologiaio, bravissimo. Lui va dall'orologiaio, ci parla, si convince che è una persona seria, che di orologi se ne intende davvero. Poi, solo per scrupolo, gli chiede: "Lei fa degli orologi, ed è molto accurato, lo vedo; ma anche i suoi orologi andranno rimessi, di tanto in tanto: come fa?" E quello: "Ah, ma noi abbiamo qui la guardia costiera, molto efficiente: tutti i giorni, a mezzogiorno esatto, spara il cannone; io i miei orologi li rimetto sempre sul cannone della guardia."

Bene, lì per lì il capitano accetta la cosa. Poi, uscito dal negozio ci ripensa e gli viene il dubbio: e quello della guardia costiera come fa? Guarda caso, incontra il comandante della guardia e glielo chiede: "Voi avete un cannone che spara a mezzogiorno, ma siete sicuri? Avete un orologio . . . ?" "Il nostro orologio va benissimo" "Andrà benissimo; ma per quanto possa andare benissimo, anche quello . . . come fate a rimetterlo?" "Certo, ma sa, giù nella città vecchia c'è un orologiaio . . . "

C'è dunque il pericolo di un giro vizioso. Per sapere se il mio orologio va bene, con che cosa lo confronto? con un altro orologio? E questo, con che cosa lo confronto?

Gli orologi al quarzo

La prova che la Terra non era un orologio perfetto è di poco più di sessanta anni fa. Fino a quel tempo, i migliori orologi disponibili erano gli orologi a pendolo. Ma per quanto fossero stati perfezionati, non erano sufficientemente sensibili e stabili: qualche indicazione l'avevano data, ma non conclusiva.

La prova sicura venne con l'adozione di due nuove specie di "orologi". Il primo è il moto della Luna e dei pianeti: invece di usare come orologio la rotazione della Terra, si usa il moto dei corpi del sistema solare. Secondo: gli orologi a quarzo. Come vedete, si tratta di due tecniche completamente diverse: la prima si appoggia fortemente sull'astronomia e sulla meccanica celeste, la seconda — gli orologi a quarzo — richiede l'elettronica. Negli anni '30 esisteva già la capacità di costruire strumenti elettronici affidabili (non a transistor naturalmente) e si sapeva utilizzare i cristalli di quarzo come campioni di frequenza. Ora questa è diventata una cosa comune, l'orologio al quarzo l'abbiamo al polso; a quel tempo invece per contenere tutto l'apparato ci voleva una stanza. Comunque erano già orologi sufficientemente affidabili per scoprire che la Terra non si comportava bene.

In effetti gli orologi a quarzo vanno bene solo per mostrare che la rotazione della Terra ha delle variazioni periodiche: accelera e rallenta. Non sono buoni per verificare l'effetto di rallentamento secolare, perché non sono affidabili su tempi lunghi. Con gli orologi a quarzo è stato scoperto che la rotazione della Terra ha delle accelerazioni e dei rallentamenti con periodi dell'ordine dell'anno.

Vediamo ora brevemente come funziona un orologio al quarzo. Ogni orologio (quasi: clessidre e simili fanno eccezione) si basa su un sistema fisico capace di moto periodico, dotato di una frequenza propria di oscillazione. Nel caso degli orologi a quarzo, il sistema che ho detto è un cristallo di quarzo. Tenete però presente che in questo contesto "cristallo di quarzo" non vuol dire quello che si trova in natura: quei cristalli a forma di prisma esagonale con piramidi sulle basi, ecc. Qui s'intende quarzo cristallino (non amorfo) costruito artificialmente e tagliato nella forma desiderata, che può essere un anello, una barretta, una piastrina. . .

Si prende dunque un cristallo di quarzo (pensiamo per es. a una barretta) e lo si mette in oscillazione, per es. longitudinalmente. Il quarzo è un cristallo, quindi un corpo solido: ha una sua costante elastica e una frequenza di risonanza propria. Perché proprio il quarzo? Perché è un cristallo che ha particolari caratteristiche di stabilità, la cui frequenza non cambia molto nel tempo per influenze esterne. Poi ne parliamo; ma per ora è un aspetto secondario.

Dato che il quarzo è piezoelettrico, le oscillazioni producono cariche e differenze di potenziale tra le due facce. Se su queste si mettono dei conduttori e li si collegano a un amplificatore, si ottiene una differenza di potenziale che naturalmente varia sinusoidalmente con la frequenza di oscillazione del quarzo. Si manda la tensione a un contatore connesso a un display digitale; o a un motore con cui si fa camminare una lancetta ... e tutto sembra fatto. Invece non è finita. Perché?

È chiaro che l'oscillazione si smorza. È come se facessi oscillare un pendolo: prima o poi l'oscillazione si smorza. L'orologio non può consistere solo di un oggetto che ha una frequenza di oscillazione propria: ci vuole qualcosa che lo mantenga in oscillazione. C'è una dissipazione di energia; il quarzo è un materiale "buono," ossia molto elastico, quindi la dissipazione è piccola (e questa è una delle ragioni per cui si usa il quarzo); però una certa dissipazione esiste comunque. Quindi bisogna rifornire energia.

Perciò il circuito connesso al cristallo non ha solo la funzione di accorgersi che il quarzo oscilla; ha anche quella di mantenere le oscillazioni. Negli orologi a pendolo ci sarà il peso e lo scappamento: quando il peso è arrivato giù qualcuno lo deve tirare su, altrimenti l'orologio si ferma: l'energia è fornita dalla gravità. Nel caso del quarzo l'energia viene fornita da questo circuito, che non è solo un amplificatore, ma esercita anche la funzione positiva di mantenere le oscillazioni del quarzo. S'intende che occorrerà anche una sorgente primaria di energia, che nel caso degli orologi da polso è una pila.

Viene spontanea la domanda: e se invece della Terra fossero gli orologi al quarzo a non comportarsi bene? Alla fine vi proporrò una serie di domande riguardo a questo problema.

Il tempo delle effemeridi e il tempo atomico

Passando al moto del sistema solare, da questo si definisce il tempo delle effemeridi (TE), che dal 1955 ha sostituito il TS come base astronomica del tempo. Usare il moto dei corpi celesti non è cosa semplice, perché i pianeti e la Luna non hanno moti regolari e uniformi. Solo in prima approssimazione le orbite sono ellittiche e valgono le leggi di Keplero; in realtà ci sono delle perturbazioni, dovute all'interazione di ciascun pianeta con gli altri. Ci vogliono un bel po' di calcoli complicati per prevedere dove dovrebbe stare un certo pianeta a un certo momento, ma lo si può fare, specialmente disponendo di calcolatori. Solo che invece d'interessarsi della posizione di un pianeta dato il tempo, si segue il procedimento inverso: si guarda il pianeta (se ne determina la posizione) e da questa, per confronto con la tabella calcolata delle posizioni (effemeride) si ricava il tempo.

È ovvio però che si tratta di un metodo scomodo e complicato: richiede tutta una serie di osservazioni raffinate, un apparato di calcoli... Non si tratta di un procedimento alla portata di tutti in ogni momento. Non si può pensare che uno si porti dietro un computer, e quando gli serve il tempo guardi Venere, faccia girare il computer e ne ricavi che ora è. Di fatto questo sistema di *determinazione del tempo* serve solo per tenere al passo giusto degli orologi più usuali, ai quali è affidato il compito della *conservazione del tempo* tra un'osservazione e l'altra. Sono questi orologi che alla fine forniscono i segnali orari utilizzati nei laboratori come nella vita pratica. Anzi erano; perché, come vedremo subito, pochi anni dopo il sistema è cambiato ancora.

A parte la scomodità pratica del TE, nasce comunque lo stesso problema: ma il TE sarà uniforme? Chi ci dice che il tempo ricavato dai pianeti sia uniforme? Riprenderò il discorso più avanti.

Nel '67, solo 12 anni dopo, la definizione del tempo è stata buttata all'aria un'altra volta: è stato adottato come campione il tempo atomico (TA). Così l'astronomia ha perso il privilegio, che aveva da millenni, della determinazione del tempo, e il tempo è diventato ormai un affare di fisici ed elettronici, con gli orologi atomici. Dal '67 il tempo campione è dato dagli orologi atomici al Cesio 133. Ho detto "gli" orologi perché naturalmente non ce n'è uno solo: ce ne sono tanti, in contatto radio tra di loro, e vanno d'accordo; il che ci fa stare tranquilli sulla loro affidabilità.

Effetti relativistici in astronomia

Aggiungo ora una cosa che non c'entra direttamente, ma vi dà un'idea della raffinatezza alla quale siamo arrivati nelle misure di tempo. Dal 1984 gli astronomi si sono rassegnati (dico rassegnati perché nessuno si complica volentieri la vita) a tenere conto degli effetti relativistici sul tempo nello studio del moto dei pianeti. La Terra gira intorno al Sole, e la sua velocità varia (perché l'orbita è ellittica); inoltre cambia la distanza dal Sole. Entrambi questi fatti provocano effetti relativistici, per cui un orologio sulla Terra e uno fermo rispetto al Sole non vanno d'accordo. La differenza varia nel corso dell'anno, ma non supera i due millesimi di secondo; però la precisione delle osservazioni è tale che bisogna tenerne conto.

Preciso meglio la situazione. Quei 2 ms vogliono dire questo: accanto al nostro orologio sulla Terra, pensiamo a un orologio su un'astronave che non sta in orbita, ma sta ferma a distanza fissa dal Sole; diciamo alla distanza media della Terra (cosa che oggi si potrebbe anche fare). Allora l'orologio sull'astronave e quello sulla Terra mostrano delle discordanze periodiche, dovute al moto della Terra. Queste discordanze assommano, nel corso di un anno, a meno di 2 ms.

Concludo il discorso sulla storia del tempo con un problema aperto: TA = TE? Visto che dal '67 il campione di tempo è il TA, nasce il problema: ma TE e TA sono lo stesso tempo? Che è un altro modo di porre la domanda di prima: il TE fornisce un orologio uniforme? Ammesso che quello atomico lo sia, i due orologi vanno d'accordo? Questo è ancora un problema aperto: ci sono dubbi, ci si lavora, si fanno misure. Ogni tanto sembra che qualcuno abbia scoperto delle differenze, ma poi la cosa rientra. Insomma è ancora oggetto di ricerca.

Ma la cosa importante è che si tratta di un problema su cui si può fare un'indagine fisica: non è un problema metafisico. Da una parte ci sono gli orologi atomici, dall'altra c'è il sistema solare che si muove per i fatti suoi. E la domanda è: i due tempi vanno d'accordo? Questo è assoggettabile a indagine sperimentale. Che gli orologi per ora non siano sufficientemente sensibili da poter decidere, è un altro discorso; ma in linea di principio le osservazioni possono dare la risposta.

Discussione

Domanda: Dunque gli orologi sono diventati così precisi che sono in grado di sentire effetti relativistici?

Risposta: Certo! Almeno in questo caso. Ci sono anche altri casi in astronomia in cui gli effetti relativistici sono significativi, ma il più importante è questo.

D. Volevo chiedere l'ordine di grandezza della differenza fra il TA e il TE.

R. Di questo non si sa assolutamente niente: nel quadro delle osservazioni che si possono fare non vi sono differenze apprezzabili. La sensibilità degli strumenti è tale che nel periodo di un anno 2 ms si vedono, ma differenze di qualche ordine di grandezza minori non sono osservabili. Quindi quello che possiamo dire è che le differenze non sono note. Se fossero — poniamo — di 1 μs, attualmente non sarebbero osservabili.

Intervento: La differenza potrebbe anche esserci; se non si vede, non è detto che non ci sia.

R. Certamente! Quando si dice che l'effetto è zero, è sempre entro il limite dell'errore. Quindi non non si può mai dire "ho dimostrato che non c'è differenza." C'è ogni tanto qualcuno che dice di aver trovato una differenza, poi si scopre qualche sbaglio nelle misure o nei calcoli. È una questione dibattuta, ma non c'è nessuna prova sicura che la differenza esista.

Se mi è consentita una piccola malignità, la ragione per cui ogni tanto qualcuno dice di aver visto una differenza la potete immaginare: uno che trovasse davvero la differenza, prenderebbe il Nobel. Quindi c'è una forte tentazione a trovare un effetto di questo genere. Poi risulta che era stato un po' precipitoso, che non aveva controllato adeguatamente qualcosa, aveva dimenticato un errore sistematico nelle misure, ecc. Il fatto è che se uno ha il sospetto di aver trovato qualcosa lo pubblica, anche prima di essere ben sicuro; se non lo facesse, rischierebbe di essere anticipato e di perdere la priorità della scoperta.

Problemi e discussione

1. Verificare la variazione del tempo solare, misurando l'istante di passaggio del Sole (ora, fine maggio, ritarda oltre 1 min/settimana).

Questo lavoro richiede una o più settimane. Dovete escogitare come si può fare in casa propria. Non ci vuole un laboratorio: dovete mettere su un qualche aggeggio che vi consenta di scoprire (che si può, ve lo dico io) che se guardate la posizione dell'ombra oggi, poi la guardate tra una settimana, poi tra due settimane, vedete che la stessa posizione non viene raggiunta alla stessa ora.

2. Discutere e spiegare che cosa esattamente significa che "il TU è indietro di oltre un minuto dall'inizio del secolo."

Ne abbiamo già parlato, ma dovete dare una spiegazione più approfondita. Se si dicesse ingenuamente: 60 secondi in 90 anni fa circa 0.7 s/anno, quindi il periodo in un anno aumenta di 0.7 s, sarebbe sbagliato.

3. Che cosa ci assicura che la discordanza fra TS e orologi sia colpa della Terra?

Abbiamo detto: la Terra non è un buon orologio, come si è visto con gli orologi a quarzo. Ma che cosa ci assicura che la differenza tra il TS e un orologio a quarzo sia dovuta alla Terra? Potrebbe dipendere dall'orologio a quarzo; come si fa a scegliere? Come fareste voi a scegliere?

4. Quali perturbazioni influenzano un pendolo? e un orologio a quarzo?

Questa domanda è un po' più semplice, ma c'è tanta roba da scavare. Anticipando un discorso che riprenderò la prossima volta: gli orologi sono sempre sensibili alle influenze esterne. Vi chiedo di riflettere su quali sono le perturbazioni esterne che possono influire sulla marcia di un orologio a pendolo, quali quelle che possono influire su un orologio a quarzo. Per ora diciamo quali; poi magari si può andare un po' più a fondo, discutere quanto; ma per ora cercate di vedere di quali situazioni ambientali si deve tener conto quando si usa un orologio.

5. Quali orologi sono sensibili alle accelerazioni?

Questo interessa di più per un discorso che devo fare dopo (e perciò dovremo pensare anche agli orologi atomici).

Faccio notare che le domande 4 e 5 hanno uno scopo preciso: sottolineare che gli orologi *sono strumenti*, sono meccanismi, funzionano in un certo modo. Quindi, quando ci si domanda se "sono soggetti o no ..." per rispondere si devono guardare i principi di funzionamento, si deve cercare nella fisica del particolare orologio; non altro.

Discussione sul problema 2:

Fabri: Qualcuno ha detto: 60 secondi diviso 100 anni fa un po' più di $2 \cdot 10^{-3}$. Che cosa vuol dire questo?

I: La differenza tra il giorno di oggi e quello di 100 anni fa: $T(\text{oggi}) - T(1900)$, dove con T intendo il periodo di rotazione della Terra.

F: Sentiamo qualcun altro.

I: In questo tempo la Terra ha rallentato, quindi il primo anno ci sarà un certo scarto, l'anno dopo ci sarà uno scarto maggiore e tutti questi si sommano:

$$(60\,\mathrm{s})/(100\,\mathrm{anni}) = 2 \cdot 10^{-8}$$

$$2 \cdot 10^{-8} \times 86400\,\mathrm{s} \simeq 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s} = T(\mathrm{oggi}) - T(1900).$$

F: Non si può pensare che ogni anno ci sia lo stesso rallentamento, lo stesso ritardo. La Terra continua a rallentare; quindi se il primo anno c'è uno scarto, il secondo anno ci sarà uno scarto doppio, ecc. Bisogna fare la somma in maniera diversa.

I: Se ritarda mettiamo di un secondo l'anno, il primo anno ha un secondo di ritardo, il secondo anno pure … ho chiamato a il ritardo, ho fatto la somma, per cui in 100 anni diventa…

F: Cioè sta dicendo: a è il ritardo nel primo anno, $2a$ il ritardo nel secondo anno …

$$a + 2a + 3a + \cdots.$$

È così?

I: Sì. Faccio così perché il ritardo è piccolo; altrimenti la cosa sarebbe più complicata…

F: D'accordo. E così viene fuori il problema di Gauss: quello di sommare i primi cento numeri interi. Conoscete la storia del problema di Gauss?

I: Quindi il ritardo nel periodo di oggi non è a, è $100a$.

F. La cosa che mi piacerebbe di più è vedere come spieghereste questo fatto, in un modo che non sia totalmente estraneo alla fisica che spiegate: che usi se possibile gli stessi argomenti, gli stessi concetti, le stesse tecniche, ecc. Il problema che abbiamo è: si dice che oggi l'orologio Terra è indietro di 60 s. Che vuol dire? Non è altro che un problema di cinematica. Il moto della Terra è ritardato, ha un'accelerazione negativa. Allora ci si può chiedere quanto vale quest'accelerazione, a partire dal ritardo accumulato. Quant'era il periodo all'inizio del secolo? Assumiamo che fosse 24 ore (non esattamente, era un giorno siderale); quanto è diventato adesso?

Però il metodo che mi avete descritto è diverso da quello che avreste usato se lo aveste visto come un problema di cinematica. Se invece della Terra si trattasse del piatto di un giradischi (di quelli dei tempi antichi, prima dei CD) fareste un ragionamento differente. In quel caso avreste pensato in termini cinematici. Siccome invece abbiamo parlato della Terra come orologio, ossia di un tempo dato in funzione di un altro tempo, allora è venuto naturale usare un linguaggio diverso. Ripensateci…

Discussione sul problema 3:

Il nostro problema è: come faccio a sapere che la colpa è della Terra e non degli orologi a quarzo? Io ho il mio orologio a quarzo in laboratorio; lo confronto con le osservazioni astronomiche, con la rotazione della Terra, e trovo che oggi è avanti; poi è avanti un po' di meno, poi è indietro, poi più indietro, poi di nuovo avanti: la differenza tra i due orologi ha un andamento oscillante.

D: Come mai in un lungo periodo gli orologi a quarzo non sono affidabili?

F: Perché i cristalli invecchiano. A lungo andare si producono delle modificazioni nella struttura interna, nelle imperfezioni del reticolo, per cui la frequenza "deriva," cambia lentamente.

I: Probabilmente le variazioni del quarzo sarebbero sempre nello stesso verso.

F: Non è detto: si può pensare che il quarzo potrebbe risentire di varie perturbazioni che hanno andamento periodico nel corso di un anno…

I: Se gli orologi al quarzo vanno d'accordo tra di loro …

F: Ecco: gli orologi al quarzo non sono uno, ogni laboratorio si fa il suo. Sono orologi fatti da fabbricanti diversi, da laboratori diversi, uno diverso dall'altro. Se li facessero tutti uguali si potrebbe spiegare che vadano d'accordo anche se non sono "giusti." Ma sono diversi e situati in luoghi diversi; quindi non è pensabile che tutte le influenze esterne, che certamente ci sono, siano uguali per i diversi orologi.

Non a caso la domanda seguente è: quali sono le influenze esterne? Sarebbe assai difficile spiegare una perturbazione che agisce nello stesso modo su un orologio che sta a Milano, uno che sta a Washington, uno che sta a Tokio. Questo è il punto: gli orologi sono differenti, sono stati costruiti da laboratori differenti, stanno in posti differenti, e confrontati tra di loro vanno d'accordo. Non è affatto casuale che queste cose siano state realizzate quando è stato possibile confrontare orologi in posti diversi della Terra, scambiando informazioni radio. Altrimenti come faremmo a saperlo? Per via radio si scambiano i segnali orari e si vede se gli orologi vanno d'accordo. Tra loro vanno d'accordo, con la Terra no. Questa è la situazione.

Notate che dal punto di vista strettamente logico, questo non dimostra un bel niente. Se posso dirlo con una battuta, è per questo che con i matematici non si va mai d'accordo... Da un punto di vista logico non possiamo escludere che tutti questi orologi, per qualche ragione a noi sconosciuta, effettivamente sbaglino tutti insieme. Però, se debbo scommettere, io sto dalla parte dei quarzi.

Discussione sul problema 4:

Vediamo ora chi riesce a trovare il maggior numero di fattori esterni che possono influenzare la marcia di un orologio a pendolo.

I: La temperatura.

F: La temperatura perché? Prima ho ricordato Harrison, che vinse il premio di 20 000 sterline per il cronometro da marina. Un'altra grande invenzione di Harrison è il sistema bimetallico per compensare i cambiamenti di lunghezza del pendolo dovuti alla dilatazione termica. Risale circa al 1730. Naturalmente, non pensate che l'effetto della dilatazione venga eliminato completamente, ma viene molto ridotto. Poi è stato inventato l'invar, una lega con coefficiente di dilatazione estremamente piccolo.

I: C'è poi una variazione di periodo dovuta all'ampiezza di oscillazione.

F: Giusto: tutto ciò che modifica l'ampiezza di oscillazione agisce sul periodo. Si dice che le oscillazioni sono isocrone, ma ...

I: Le piccole oscillazioni.

F: Sì, ma quanto piccole? Vi scrivo una formula:

$$T = T_0 \left(1 + \tfrac{1}{16}\,\alpha^2 + \cdots\right)$$

dove α è l'ampiezza, T_0 il periodo ad ampiezza 0. Ad es. se $\alpha = 0.1\,\mathrm{rad}$, il secondo termine è $< 10^{-3}$. Sembra piccolo; ma pensate a un pendolo che sbagli di 10^{-3}: che cosa significa?

Dato che in un giorno ci sono 1440 minuti, si trova un minuto al giorno. Per gli effetti che cerchiamo sarebbe un pendolo da buttare! Non ci si può permettere di avere variazioni di ampiezza di questo genere. Quindi l'osservazione sull'ampiezza è importante e giusta: è un problema che dobbiamo risolvere.

I: Penso sia stato risolto con il pendolo a cicloide.

F: Sì, era quello che volevo dire. Il pendolo cicloidale teoricamente ha un periodo che non dipende dall'ampiezza. Teoricamente, perchè si debbono risolvere altri problemi; per es. il dispositivo che produce la cicloide ha attriti notevoli. Quindi i pendoli cicloidali sono difettosi per un altro verso. Un'altra via è cercare di mantenere costante l'ampiezza.

I: Si potrebbe fare con un meccanismo di risonanza. Ho visto questo per un diapason elettromagnetico, ma penso si possa applicare anche a un pendolo.

F: Abbiamo esaminato l'ampiezza; c'è altro?

I: Il luogo.

F: Vero, però non è un effetto che cambia col tempo, se l'orologio sta sempre nello stesso posto.

I: Il piano di oscillazione.

F: Se vuoi dire che il piano di oscillazione potrebbe non essere verticale, non è un problema. Si può fare in modo che il pendolo si disponga automaticamente in verticale: tutti i pendoli reali sono fatti così.

I: L'accelerazione va considerata in qualche modo; vale anche per gli orologi a quarzo.

F: Questo rientra nella domanda seguente, la vedremo dopo. Manca ancora un effetto importante...

I: La densità dell'aria.

F: La densità dell'aria perché?

I: Per la spinta di Archimede.

F: Questo è un motivo; ma ce n'è anche un altro.

I: Lo smorzamento.

F: Sì, un oscillatore smorzato ha un periodo diverso da uno non smorzato.

Ma torniamo alla spinta di Archimede. L'entità dell'effetto dipende naturalmente dalla materia con la quale si fa il pendolo. Supponiamo che sia fatto di bronzo, di rame, di qualcosa che abbia una densità di circa $10\,\mathrm{g/cm^3}$. La densità dell'aria è $10^{-3}\,\mathrm{g/cm^3}$, e rapporto è 10^{-4}. Quindi tra un pendolo nel vuoto e un pendolo nell'aria a pressione atmosferica, la variazione di periodo dovuta alla spinta di Archimede è dell'ordine di 10^{-4}. Non è tantissimo, ma non è neppure poco. Però l'aria c'è sempre, per cui la sola cosa che conta è il cambiamento della densità dell'aria. Se per es. cambia la temperatura, la densità dell'aria cambierà un po', ma non tanto; quindi si avrà un effetto molto più piccolo. Ricordiamoci però che l'orologio Terra sbaglia alcuni centesimi di secondo in un anno; se si va a vedere quanto dev'essere buono un pendolo per scoprire un effetto del genere, si scopre che la densità dell'aria è importante, e come! Quindi bisogna tenerne conto; la cosa migliore è mettere il pendolo sotto vuoto, col che si elimina anche lo smorzamento.

Ci può essere altro per un pendolo?

I: La presenza di un campo magnetico.

F: Certo. In primo luogo, se il pendolo contiene sostanze ferromagnetiche c'è una forza significativa; poi ci sono le correnti indotte, il cui effetto prevalente è di aumentare lo smorzamento. Attraverso questo possono cambiare l'ampiezza.

I: E anche il periodo.

F: Sì, agiscono come un attrito qualunque, quindi cambiano anche il periodo.

I: Variazioni di gravità dovute alla Luna.

F: Ossia alle forze di marea. Questo è un discorso serio ma complicato. Si tratterebbe di vedere quanto è, se è un effetto importante. Delle forze di marea ne riparleremo ampiamente.

I: Per evitare l'effetto del campo magnetico terrestre bisognerebbe tenere il piano di oscillazione nella direzione del meridiano, o meglio nella direzione del campo magnetico: se si tiene in questa direzione ...

F: A dire il vero, quello che mi dà fastidio non è che ci sia il campo magnetico, ma che questo cambi, come al solito. Ma visto che mi avete citato campi magnetici, potevate nominare anche i campi elettrici.

I: Si schermano.

F: Certo, il rimedio si trova; ma come in tutti i problemi di fisica sperimentale, per rimediare bisogna che prima ci si pensi. Per questo è importante esaminare tutte le possibilità.

Notate che qui entra in modo benefico la concorrenza fra diversi ricercatori. Quando uno pubblica un lavoro, può venir fuori un altro: "ma tu non hai pensato che c'era questa cosa!" Se il primo non ci ha pensato, ci ha pensato quell'altro, tutto contento, per così dire, di potergli fare le bucce. Andando avanti così si eliminano man mano tutte le cause di errore.

Bene: contentiamoci per il pendolo, e passiamo agli orologi a quarzo. Provate a dirmi quali sono gli effetti che possono disturbare gli orologi a quarzo.

I: Uno lo ha detto lei, l'invecchiamento.

I: La temperatura.

I: La pressione.

I: I campi elettrici.

F: La temperatura sì, certamente. Però il quarzo non è un cristallo isotropo; di conseguenza, a seconda di come lo si taglia la dilatazione termica è diversa, e ci sono dei modi di tagliarlo per cui la dilatazione termica è trascurabile. In effetti qui non è importante la dilatazione termica, ma come cambia il modulo di elasticità con la temperatura. Ci sono dei tagli per cui l'effetto della temperatura si può ridurre molto.

La dipendenza dalla temperatura per un oscillatore a quarzo la potete verificare facilmente in laboratorio, se disponete di due frequenzimetri. Uno lo si accende e lo si lascia acceso un bel po' di tempo, in modo che arrivi a temperatura di regime. Si accende il secondo e si collega al primo. Tutti i frequenzimetri hanno un connettore di uscita del segnale dell'oscillatore interno: basta collegarlo all'ingresso del primo. Facendo questo, potete vedere la variazione di frequenza mentre il secondo oscillatore si scalda. Mi pare che per frequenzimetri non particolarmente raffinati la differenza sia sulla quinta cifra, ma si vede bene.

I: Le impurità.

F: Ricordate che non si tratta di vedere qualcosa di permanente, ma qualcosa di esterno che può cambiare, e con ciò modifica il funzionamento dello strumento. Per esempio: la densità, la pressione dell'aria possono influire? Normalmente i cristalli di quarzo si trovano in scatole chiuse, quindi gli effetti atmosferici sono trascurabili.

Lo scopo di tutto il discorso è di ribadire che di fronte a un orologio ci si deve porre queste domande. È chiaro che se poi trovo un orologio che di suo, per com'è fatto, è poco sensibile alle influenze esterne, tanto meglio: se è poco sensibile, sarà più facile renderlo insensibile. Una qualità importante di un orologio è proprio questa.

Un orologio a pendolo, per esempio, come abbiamo visto è sensibile a moltissime influenze. A proposito, avevamo dimenticato un'altra possibile influenza: le vibrazioni.

I: I terremoti.

F: Non occorrono eventi disastrosi come i terremoti. Basta molto meno: un camion che passa per la strada, vibrazioni di qualunque tipo. Dato che il pendolo è un congegno meccanico, tutte le azioni meccaniche lo disturbano. Un altro congegno, costruito su un principio di funzionamento diverso, ne risentirebbe meno. Non che un orologio a quarzo non risenta delle vibrazioni; però il cristallo di quarzo è piccolo, si può sospendere facilmente in modo elastico, così che se anche passa un camion non se ne accorge. Con l'orologio a pendolo questo è molto più difficile.

Discussione sul problema 5:

Proviamo ora ad affrontare la questione a rovescio: invece di chiederci quali sono le cose che influenzano un orologio, vediamo quali sono gli orologi sensibili alle accelerazioni. Lasciamo da parte gli orologi atomici: ne parleremo dopo più ampiamente.

I: La clessidra, se uno la fa cascare.

F: Certo, e non è uno scherzo. La clessidra, come il pendolo, funziona in base all'esistenza di un campo gravitazionale. Ci vuole la forza di gravità, anche se per motivi differenti. La sabbia di una clessidra deve cadere, quindi l'accelerazione influisce. Se porto un'orologio in macchina, e faccio una frenata, entrano in gioco le forze apparenti. Queste agiscono sia sul pendolo che sulla clessidra.

In particolare, clessidra e pendolo, come congegni che funzionano in base alla gravità, se li metto su un satellite in orbita non funzionano più: qui non si tratta di piccole variazioni.

I: Ma anche su una macchina in movimento, un treno.

F: Le accelerazioni della macchina o del treno influiscono, ma io volevo sottolineare che se lo metto in un ambiente dove non si sente la forza di gravità, l'orologio si ferma del tutto. L'effetto dell'accelerazione su pendolo e clessidra è disastroso, proprio perché il loro funzionamento si basa sulla gravità.

Gli orologi al quarzo sono sensibili all'accelerazione?

I: Sì! No!

F: Avete ragione tutti e due, in un certo senso. Per capire perché, parliamo prima degli orologi a bilanciere. Avete mai sentito qualcuno che dice: "Il mio orologio, a seconda se lo metto verticale od orizzontale cambia la marcia"?

I: Per via dell'attrito.

F: Sì, può essere l'attrito, certamente.

I: Cambia la pressione sulle molle.

F: Un orologio a bilanciere ha una rotella che oscilla, ruotando intorno a un asse; c'è poi una molla a spirale, che dà una forza di richiamo; poi l'ancora, ossia il sistema detto "scappamento," che serve per dare al bilanciere delle piccole spinte al momento giusto. Ed ecco la domanda: se questa rotella che oscilla sta in un piano orizzontale o verticale, può fare qualche differenza?

La forza di gravità influenza il moto di un corpo che oscilla intorno a un asse? Dipende dalla posizione del baricentro. Un orologio ben fatto è bilanciato, il che vuol dire che il baricentro del bilanciere sta sull'asse. Nel bilanciere ci sono dei pioletti, che si possono mettere o togliere, proprio per bilanciarlo.

Se il baricentro è sull'asse, allora il momento della forza di gravità è nullo. Potrà ancora agire l'attrito, ma non c'è un effetto diretto della gravità. La cosa cambia se il baricentro non sta sull'asse. Allora oltre alla molla c'è un'altra forza di richiamo, la gravità, e l'effetto cambia a seconda che il baricentro si trovi più alto o più basso dell'asse. Se sta più basso, cosa fa il periodo per effetto della forza di gravità, aumenta o diminuisce?

I: Diminuisce.

F: Giusto: diminuisce. Se invece fosse in alto aumenterebbe. In realtà ho sottinteso che si tratti di piccole oscillazioni, come quelle di un pendolo, mentre le oscillazioni del bilanciere di un orologio sono molto più grandi, qualcosa come un giro e mezzo; però l'effetto rimane quello che abbiamo detto. Quindi un orologio a bilanciere (non bilanciato) è sensibile all'accelerazione.

I: L'accelerazione agisce anche sulla molla, la deforma.

F: Certamente, anche questo.

I: Non riesco a pensare a un orologio insensibile all'accelerazione.

F: D'accordo, ma il problema è *quanto* sensibile.

Ora voi mi direte che sto barando, ma c'è una ragione molto più semplice per cui entra in gioco l'accelerazione. Se lascio cadere il mio orologio da polso al quarzo, si rompe, si ferma: perché?

I: Perché l'accelerazione è notevole.

F: D'accordo, ma perché si ferma?

I: Provoca la rottura.

F: Vediamo. C'è un cristallo, che nell'urto viene sottoposto a una violenta deformazione; ci sono fili, saldature, un sacco di cose che si possono deformare, e anche rompere se l'accelerazione è troppo grande.

Voi direte: bella scoperta! Ma l'ho detto per mettere in evidenza che quando si parla di accelerazione bisogna pure precisare. È chiaro che quando noi andremo in cerca di orologi buoni, cercheremo anche orologi insensibili alle accelerazioni. Mi dite: tutti sono sensibili. Tutti sono (siamo) sensibili a tutto: il problema è quanto.

Mettiamo un orologio (a pendolo, da polso o quello che volete) in un razzo, che a un certo punto parte con una certa accelerazione. Assumo anzi che l'accelerazione aumenti piano piano, regolando la spinta dei motori. Per cominciare, pensate al caso più semplice: un pendolo ossia una massa appesa ad un filo. L'accelerazione produce naturalmente una forza apparente $-ma$; se l'accelerazione è rivolta verso l'alto, la forza apparente sarà diretta verso il basso, quindi la massa appesa al filo pesa di più: al suo peso effettivo si aggiunge la forza apparente. Il filo sente una tensione maggiore, e se l'accelerazione diventa così grande che la tensione supera il carico di rottura del filo, questo si rompe.

Altro esempio: due motociclisti, uno dietro l'altro, viaggiano alla stessa velocità e a un certo momento frenano. Essi sono collegati da una bacchettina molto sottile; se frenano allo stesso modo, cioè con la stessa accelerazione, mantengono la stessa distanza e la bacchetta non si rompe; se invece uno frena di più e l'altro frena di meno, allora la bacchetta si rompe. Quindi posso anche avere un'accelerazione grandissima, purché le accelerazioni delle varie parti siano le stesse.

L'orologio che cade però è un caso diverso: ha delle parti appoggiate, sospese, collegate le une alle altre, che sono tenute in posizione grazie alle reazioni vincolari (come il caso del filo, che è l'esempio più ovvio). Anche un cristallo di quarzo sta tra due elettrodi metallizzati e due fili. Il cristallo ha un peso, anche se piccolo, che è compensato dalla reazione vincolare dei fili e del sostegno su cui i fili vanno a finire.

Se devo vedere l'effetto relativistico dovuto al moto della Terra, ho bisogno di un orologio che sia affidabile meglio del centesimo di secondo; se voglio vedere gli effetti relativistici legati alle forze gravitazionali (il cosiddetto redshift gravitazionale) mi ci vuole un orologio molto molto migliore. Non c'è un criterio unico: bisogna vedere a quale scopo, che cosa voglio vedere, che cosa m'interessa rivelare.

Ciò non toglie che tra i diversi orologi c'è una gerarchia. Dal punto di vista della sensibilità alle accelerazioni, pendoli e clessidre sono un disastro; l'orologio a bilanciere è già meglio; l'orologio a quarzo è meglio ancora. Sottolineo questo: quando vi domandate "ma questo è un buon orologio?" dovete esaminare tutti questi effetti, in particolare dovete tener conto delle accelerazioni.

Perché le accelerazioni c'interessano particolarmente? Perché quando metteremo un orologio in un riferimento accelerato, vorremo sapere che cosa gli succede. Non è la stessa cosa qualunque sia l'orologio. Si potrebbe dire: "usiamo un orologio ideale." Ma gli esperimenti non si fanno con gli orologi ideali: si fanno con orologi veri. Quindi dobbiamo avere qualche indicazione su quello che succede agli orologi reali quando li si mette in un riferimento accelerato.

LEZIONE 2

Gli orologi atomici

Avevo concluso la lezione precedente dicendo che nel ’67 viene adottato il tempo atomico, basato su una rete di orologi atomici al ^{133}Cs. Attualmente il campione ufficiale di tempo è appunto il TA.

Mi pare quindi giusto dire qualcosa sugli orologi atomici. Non perché sia assolutamente indispensabile: potrei limitarmi a dire che gli orologi atomici esistono, sono molto precisi, molto accurati, molto sofisticati. Però in questo corso, per l’impostazione che do all’insegnamento della relatività, vorrei cercare di non lasciare in giro delle cose “mitiche,” per cui in particolare non voglio che gli orologi atomici restino qualcosa che non si sa come funziona, ma si sa solo che sono cose magiche, bellissime...

Darò quindi una velocissima e sommaria idea di com’è fatto un orologio atomico. Lo scopo è di sottolineare che l’orologio atomico *è uno strumento fisico*, costituito di certi componenti, e che funziona secondo certe leggi.

Prima di tutto: perché atomico? La fig. 2–1, sebbene estremamente schematica, già dà un’idea del fatto che un orologio atomico non è un congegno molto semplice: un pendolo o un orologio al quarzo sono più semplici da spiegare. Nel disegno la prima cosa da guardare è la striscia che l’attraversa da sinistra a destra: è un fascio di atomi di Cesio (^{133}Cs, che è l’unico isotopo stabile). Poi ci sono alcuni componenti che vorrei evitare di descrivere in dettaglio, come i separatori magnetici; ci basti sapere che il loro scopo è d’isolare quegli atomi del fascio che si trovano in un determinato stato.

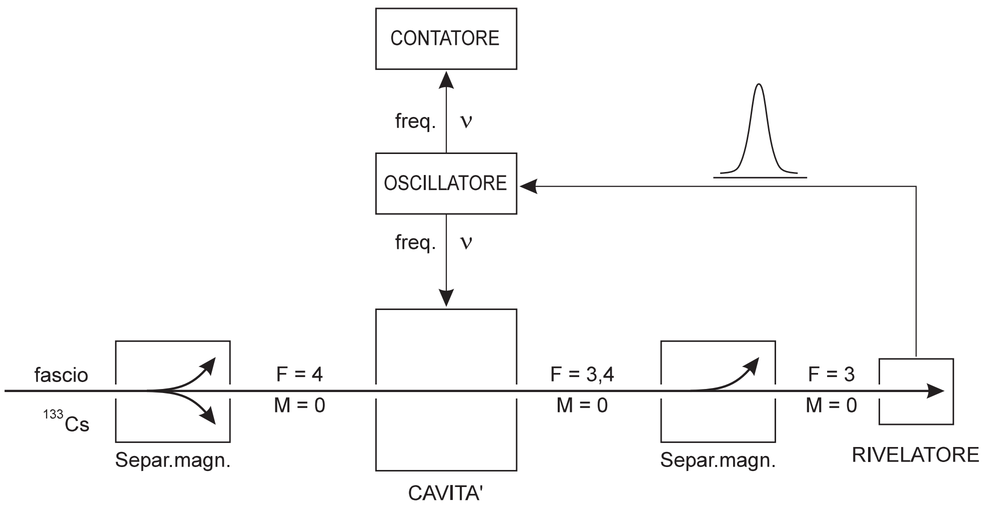


fig. 2–1

Gli elettroni dell’atomo avranno vari possibili stati: tra questi c’è lo stato fondamentale. Nelle presentazioni della fisica atomica di solito ci si ferma qui: si considerano semplicemente gli stati elettronici, ma in realtà le cose sono sempre un po’ più complicate. In particolare lo sono in questo caso, perché il nucleo di ^{133}Cs ha un momento magnetico, il cui campo interagisce con gli elettroni. Ne consegue che quello che si pensa comunemente come stato fondamentale in realtà non è un singolo livello energetico, ma è separato in due sottolivelli. La spaziatura in energia fra questi sottolivelli è molto piccola: circa $4 \cdot 10^{-5}$ eV. Per questo motivo si parla di *struttura iperfina*. C’è un numero quantico che classifica i livelli della struttura iperfina, solitamente indicato con F: i due sottolivelli hanno $F = 3$ (il più basso) e $F = 4$ (il più alto).

Il fatto che la separazione fra i due sottolivelli sia piccolissima ha una conseguenza importante: già a temperatura ambiente, e a maggior ragione alla temperatura del fascio

(v. dopo), i due livelli sono entrambi popolati; anzi, a causa del più alto valore di F, il sottolivello superiore contiene un numero di atomi un po' maggiore.

Alla transizione fra i due sottolivelli corrisponde un'emissione o un assorbimento di fotoni della corrispondente energia. La frequenza di questa radiazione (circa 9 GHz) sta nelle microonde: la lunghezza d'onda è qualche centimetro.

Il principio dell'orologio al Cesio è questo: col primo separatore si escludono dal fascio gli atomi con $F = 3$, lasciando solo quelli con $F = 4$. Si fa poi passare il fascio in una cavità che ha una frequenza di risonanza corrispondente alla transizione fra i sottolivelli iperfini; se nella cavità c'è un campo elettromagnetico a quella frequenza, esso induce la transizione da 4 a 3. Il campo è generato da un oscillatore esterno, il quale nominalmente dovrebbe avere esattamente la frequenza necessaria per la transizione: su questo torniamo fra un momento.

Dato che il livello 4 è più alto, si tratterà di un'emissione (non spontanea: stimolata) ma questo non è importante. È invece importante che gli atomi che escono dalla cavità non sono più tutti nello stato 4: almeno in parte sono andati nello stato 3. Quelli rimasti nello stato 4 vengono eliminati con un secondo separatore magnetico, e i restanti inviati a un rivelatore, il quale dà un segnale proporzionale al numero di atomi che riceve per unità di tempo.

Occorre ora tener presente che la frequenza del campo nella cavità non sarà proprio quella giusta, e comunque può fluttuare, per varie ragioni, come ad es. variazioni di temperatura. Ma se la frequenza cambia, che cosa succede? Se la frequenza non è quella giusta per produrre le transizioni, gli atomi in uscita sul livello 3 non ci sono più, o per lo meno cambiano di numero; il rivelatore se ne accorge e dà un segnale diverso. La variazione del segnale viene usata per creare un feedback, ossia un segnale di correzione che viene riportato all'oscillatore. Così se l'oscillatore va fuori dalla frequenza giusta, viene corretto e riportato alla frequenza giusta.

Vedete quindi che sebbene l'oscillatore non sia perfetto, esso resta agganciato alla frequenza di transizione degli atomi (la frequenza corrispondente alla distanza fra i due livelli iperfini) e viene mantenuto lì, perché quando si sposta automaticamente nasce un segnale di correzione. Questa tecnica del feedback è in uso da tempo, in moltissime applicazioni.

Il segnale che esce dall'oscillatore e che ora sappiamo agganciato alla frequenza della transizione atomica, viene mandato a un amplificatore; poi eventualmente diviso in frequenza, se vogliamo fino anche a 1 Hz, ossia un ciclo al secondo. Notate che la divisione con i contatori elettronici è sicura: se il contatore è progettato per dividere per 10 non può dividere per 9.9: non ci può essere un errore nella divisione (a meno che non si perdano dei conteggi).

Risultato: la definizione del secondo nel Sistema Internazionale è oggi la seguente: 9 192 631 770 cicli della transizione iperfina del ^{133}Cs.

Virtù degli orologi atomici

Da che cosa dipendono la bontà e l'accuratezza di un orologio di questo genere? Dipendono dal fatto che quella frequenza è strettamente legata alla differenza di energia tra i due livelli, che è una proprietà degli atomi, indipendente da parametri esterni, come accadeva invece per un pendolo, per il quarzo, ecc. Gli atomi in sé sono oggetti molto più sicuri, affidabili, stabili, di quanto non siano apparati costruiti da noi.

Perché sono importanti gli orologi atomici? Ci sono due ragioni. Da un punto di vista pratico, perché sono i migliori che abbiamo: sono pochissimo sensibili alle influenze di cui abbiamo parlato. Alcune di queste influenze si possono sempre ridurre: per esempio per le variazioni di temperatura si può usare un termostato. Ma nemmeno i termostati sono perfetti; la temperatura in un termostato non rimane rigorosamente costante, ma cambierà, sia pure di poco.

Il fatto è che un orologio atomico è pochissimo sensibile alle variazioni di temperatura, è pochissimo sensibile ai campi esterni, ecc.; naturalmente quando dico "pochissimo" dovrei tradurre questo "pochissimo" in numeri, cioè dire a quanto ammonta questa poca sensibilità. Sta di fatto che con gli orologi atomici oggi è possibile tranquillamente misurare il tempo, anche su intervalli dell'ordine di mesi, con un'accuratezza dell'ordine di 10^{-13}. Questo per noi è importante, perché per verificare certi effetti relativistici abbiamo bisogno di orologi stabili a questo livello.

La seconda proprietà degli orologi atomici è che sono *assoluti*. Che cosa intendo con questo? Il funzionamento degli orologi atomici idealmente dipende solo dalle proprietà degli atomi, che sono tutti identici, indipendentemente dal tempo e dal luogo. Ho detto "idealmente" perché a stretto rigore qualche influenza esterna c'è sempre. È chiaro ad esempio che se voi deformate una cavità, ne cambiate le dimensioni, si produrrà una leggera modifica nella frequenza dell'orologio; però si tratta di una modifica molto piccola, molto minore di quella che si avrebbe con orologi fatti in altro modo. Posso quindi dire: dato che l'orologio dipende solo dagli atomi, ogni volta che costruisco un orologio basato su quegli atomi, la frequenza sarà quella che mi aspetto.

Inoltre gli atomi sono tutti identici, il che vuol dire che se in due laboratori si fanno due orologi al Cesio, non c'è bisogno di operazioni speciali per metterli d'accordo. Vanno d'accordo già di per sé, perché sfruttano la transizione $4 \to 3$ dell'atomo di Cesio. Gli atomi di Cesio qui, a Tokio, sulla Luna, sono uguali; tutti i loro livelli sono gli stessi, le frequenze di transizione sono le stesse. Per cui ogni orologio, per conto proprio, è già un campione di frequenza, cosa che non è vera per un orologio al quarzo: se fabbrico due barrette di quarzo, non ho nessuna ragione per aspettarmi che siano uguali.

C'è una questione legata alla velocità degli atomi del fascio, cui voglio accennare per completezza. Il fascio di atomi dell'orologio consiste di atomi che si muovono: a che velocità? Si tratta di velocità termiche, in quanto gli atomi sono prodotti riscaldando il cesio metallico e facendolo evaporare, a qualche centinaio di °C. Tra l'altro il Cesio è un elemento pesante: di conseguenza a parità di temperatura la velocità di agitazione termica è più bassa. Senza fare conti, suppongo che sia dell'ordine del centinaio di m/s. Ne segue che il rapporto v/c è dell'ordine di 10^{-6} o anche meno.

Questo è importante, perché la frequenza della radiazione emessa dagli atomi in moto viene alterata dall'effetto Doppler. La disposizione sperimentale è scelta in modo che intervenga solo l'effetto Doppler trasversale, che è di secondo ordine, quindi inferiore a 10^{-12}; studiando più in dettaglio l'apparato, si vedrebbe che l'effetto Doppler ha conseguenze trascurabili.

Da adesso in poi ragioniamo da teorici. Le considerazioni sperimentali che abbiamo fatto sono importanti: dovevo farle, perché mi preme vi sia chiaro che quando si parla di orologi atomici ci si riferisce a congegni reali, il cui funzionamento va studiato dal punto di vista sperimentale, fino a convincersi che è estremamente affidabile. Ciò fatto, dal punto di vista teorico opero un'astrazione, e prendo l'orologio atomico come paradigma di un orologio ideale. Brevemente, affermo che *due orologi atomici in luoghi ed epoche diverse segnano lo stesso tempo.* Intendo dire che sono uguali: più uguali di così non li so fare; il loro funzionamento dipende solo dal fatto che dentro hanno quei certi atomi, identici dappertutto; quindi sono sicuro che segnano lo stesso tempo. Anche se li mando sulla Luna (non dico sul Sole, perché è difficile che un orologio atomico continui a funzionare anche sul Sole); anche se li metto in situazioni e ambienti molto diversi dal mio laboratorio, li posso considerare come campioni ideali di tempo.

Prenderemo quindi l'orologio atomico come paradigma di un orologio ideale, nel senso che quando parleremo di orologi ideali, potrete visualizzarli come orologi atomici. Ideali non saranno, poiché non c'è nulla di perfetto negli strumenti che un fisico può realizzare; ma questi sono estremamente vicini, sono di gran lunga il meglio, molto meglio degli orologi a pendolo, degli orologi a quarzo, ecc.

Orologi come strumenti fisici

Questo è il momento di una considerazione didattica: nell'insegnamento della fisica è necessario dedicare spazio agli orologi perché bisogna togliere al tempo quell'aura metafisica che si porta dietro. Ripeto quanto ho già detto nella lezione scorsa: il tempo dal punto di vista di un fisico non è una cosa speciale; è una grandezza che si misura con strumenti che si chiamano orologi e che sono fatti in qualche modo. Sono strumenti di misura: come tali possono essere più o meno buoni, più o meno affidabili, come qualunque altro strumento di misura: come un termometro, come un amperometro. In questo non hanno nessuna particolarità, sono strumenti della fisica; sono per così dire meccanismi, anche se il termine per un orologio atomico non è molto appropriato, visto che non ci sono rotelle che girano; ma in senso generico sono congegni, apparati... Usate la parola che più vi piace; l'importante di queste parole è che vogliono indicare qualcosa di reale, che è stato fabbricato da qualcuno che sa fare quelle cose; che funzionano — bene o male secondo quanto è bravo chi li ha costruiti — ma anche in questo non hanno niente di diverso da qualunque altro strumento della fisica.

Hanno diversi principi di funzionamento (dall'orologio ad acqua all'orologio atomico, tutti hanno qualche principio fisico alla base del loro funzionamento: molto diversi uno dall'altro, ma ognuno ha il suo, e chi vuol sapere come funziona un orologio deve capire qual è il principio di funzionamento); sono soggetti a perturbazioni esterne (di questo abbiamo ampiamente discusso: temperatura, pressione, campi elettrici, magnetici, accelerazioni, ecc.); se non sono assoluti devono essere tarati.

Qui nasce una differenza importante: esistono gli strumenti *assoluti* e quelli no, cioè quelli che si portano dentro il riferimento a un'unità di misura naturale, e quelli che invece non ce l'hanno. Chiaramente un orologio a quarzo non è assoluto. Il quarzo ha la sua frequenza di risonanza, ma quanti hertz è questa frequenza di risonanza? come faccio a saperlo? L'unico modo è di confrontarlo con un altro orologio... Invece un orologio al Cesio ha una frequenza di risonanza che è scritta nella natura degli atomi: in questo senso è indipendente da misure, da tarature, da confronti con qualcos'altro.

Un orologio ideale, quello che dobbiamo cercare di approssimare quanto possibile, non dovrebbe richiedere taratura: dovrebbe avere "scritta dentro" la sua frequenza di funzionamento, in modo che io non debba preoccuparmi di metterlo d'accordo con qualcos'altro. Poi dovrebbe essere libero da influenze esterne. Ciò non è mai possibile in modo completo, ma quando parlo di orologio ideale, penso a questo: a un orologio che non subisce influenze esterne e al tempo stesso è assoluto.

Qui bisogna fare attenzione: il fatto che ora abbiamo un orologio assoluto, non ha niente a che vedere col fatto che sia assoluto il tempo. Orologio assoluto l'abbiamo detto: è uno che non ha bisogno di taratura, tanto che posso essere sicuro che orologi diversi, situati anche in luoghi diversi, e anche in condizioni di moto diverse (ma di questo riparleremo) segnano lo stesso tempo. Tempo assoluto invece ... lo discuteremo subito; ma è proprio la disponibilità di orologi assoluti che ci permette facilmente di porci il problema *sperimentale* se il tempo sia o no assoluto.

Il tempo assoluto

Dal momento che la relatività è fisica dello spazio-tempo, bisogna analizzare il ruolo dello spazio e del tempo nella fisica newtoniana, dove lo spazio e il tempo sono assoluti. Ma prima di riflettere su cosa significano i termini "spazio assoluto" e "tempo assoluto," bisogna pensare a come si misurano spazio e tempo. Per quel che riguarda la misura del tempo abbiamo detto abbastanza per inquadrare la questione. Anche al di là di un insegnamento della relatività, del tempo e di come lo si misura sarebbe giusto che se ne parlasse più di quanto di solito non si faccia.

Ho già detto che non ci si può mettere a insegnare relatività (o comunque fisica moderna) semplicemente appiccicandola a quello che si fa di solito. Se si vuole affrontare in modo accettabile, comprensibile e chiaro la fisica moderna, bisogna prima pensare a come s'insegna il resto della fisica. Una parte di questo ripensamento consiste nel trattare meglio e più a fondo certi argomenti che, si può dire, si fanno sempre, ma si fanno un po' troppo di corsa. Uno di questi è il tempo assoluto. Sicuramente, iniziando lo studio della fisica, si legge: "nella meccanica newtoniana il tempo è assoluto." Che vuol dire? Se lo si vede quasi come un discorso filosofico, è facile essere tentati di passare oltre rapidamente. Ma invece è il caso di rifletterci un po' sopra.

Il punto di partenza è la frase di Newton che ho già citato nella prima lezione, e che ora vi ripeto:

> "... in sé e per sua natura, senza relazione ad alcunché di esterno, scorre uniformemente."

Notate che con la sensibilità di oggi una frase del genere non verrebbe in mente; e in ogni caso verrebbe subito in mente l'obiezione: uniformemente rispetto a che? come faccio a dire che il tempo scorre uniformemente? Devo avere un termine di paragone.

È importante, dal punto di vista della storia della scienza e anche della storia della filosofia, osservare che ai tempi di Newton obiezioni di questo tipo non venivano sentite. O per essere più precisi, non erano molto sentite; erano sentite soltanto da qualcuno, e più a proposito dello spazio che del tempo. Quanto al tempo, l'asserzione di Newton appariva plausibile: il tempo c'è, esiste per conto suo, indipendentemente da noi, dai fenomeni, dal mondo, da quello che succede, ecc. Non solo è assoluto nel senso etimologico del termine ("absolutus" ovvero sciolto, senza legami), non è vincolato a niente, non dipende da niente; ma anche esiste in sé. Nella cultura del '6-'700 una tale concezione è del tutto naturale; ma voglio farvi notare che anche se in seguito, nel pensiero filosofico e scientifico, l'idea è stata riesaminata e discussa, ciò non toglie che sia così profondamente radicata nella nostra cultura, ad ogni livello, che ancor oggi ci riesce difficile accettare che le cose possano andare altrimenti.

Se prendete il solito uomo della strada e gli ponete le domande giuste, vi accorgerete che ha ben salda quest'idea del tempo assoluto: l'abbiamo tutti, compresi quelli che dovrebbero avere un'idea diversa perché hanno studiato abbastanza. Sotto sotto, la nostra idea inconscia è quella che ha espresso Newton. E rispunta fuori quando si ragiona di fisica, e crea delle difficoltà. Sarebbe anche interessante — ma non ne abbiamo il tempo — domandarsi come mai si è prodotta questa visione del tempo nella nostra cultura; domandarsi se è veramente l'unica possibile, se nella storia del pensiero, e nelle varie culture, c'è e c'è sempre stata proprio quest'unica visione del tempo (si scoprirebbe che la risposta è no, a cominciare dal mondo greco).

E invece quando ci mettiamo a parlare di relatività, questa visione del tempo dobbiamo rimetterla in discussione. Il senso del mio discorso è: per rimetterla in discussione in modo consapevole, è necessario intanto fare una riflessione consapevole sul fatto che quest'idea del tempo ce l'abbiamo ben radicata dentro di noi. A un certo punto si cerca di rimuoverla, si crede di esserci riusciti e invece...

Nella vostra esperienza avrete certamente visto nei ragazzi lo stesso fenomeno, a proposito di altre idee. Spiegate per bene le idee di Galileo, la dinamica newtoniana ... ed ecco che inaspettatamente rispunta fuori una concezione pregalileiana del moto e delle forze. Perché quando certe cose non sono state esplicitate e messe in discussione bene, si rimuovono ma poi basta rifare le domande critiche e ... Un solo esempio: quanto vale l'accelerazione di un corpo lanciato verso l'alto, nel punto di massima altezza? Fate la prova: quanti vi diranno che è zero?

La matematizzazione del tempo

Ora voglio dedicare un po' di tempo a una questione collaterale rispetto al nostro discorso, ma che a me sembra importante discutere: sto parlando della *matematizzazione del tempo*. Questo introduce un tema importantissimo per tutta la fisica moderna e in particolare per la relatività: il ruolo della matematica. In che senso e in che misura ci dev'essere una formulazione matematica dei concetti fisici? che posto ha? che cosa significa? Mi sembra utile parlarne nel caso del tempo, per due ragioni: primo, perché in relatività il tempo ha un ruolo dominante, quindi è cosa che va sviscerata da tutti i lati; secondo, se si vuole affrontare il problema del ruolo della matematica nella fisica, il caso del tempo è forse quello più semplice, più elementare. Così elementare che di solito viene totalmente trascurato.

Il tempo della fisica newtoniana viene identificato con la retta reale orientata. (Una pignoleria matematica: di per sé la retta dei numeri reali non possiede un'orientazione se non si precisa la struttura algebrica. Con la sola struttura di gruppo additivo non c'è un orientamento definito; se s'introduce una struttura di spazio vettoriale con moltiplicazione sì: i numeri positivi sono diversi dai negativi. Ricordo inoltre che l'orientamento è una struttura diversa dalle strutture algebriche.) Quest'interpretazione sembra non richiedere ulteriori spiegazioni; si potrebbe anzi darla come un punto di partenza ovvio, sottinteso, quasi. Nella meccanica newtoniana il tempo è rappresentato con un numero reale; quando il tempo passa, ci spostiamo verso destra sulla retta dei numeri reali (asse dei tempi = asse delle ascisse, ecc.)

Ma c'è da dire prima di tutto che questo è il risultato di una decisione: a un certo punto decidiamo che la struttura matematica adatta per descrivere il fatto fisico che chiamiamo "tempo" è proprio quella della retta reale. Se mi chiedete: "che altro potrebbe essere?" rispondo: perché dovrebbe essere proprio quella? Occorre aver chiaro che non si tratta di un "a priori," non è un fatto scontato: è una decisione consapevole; di fronte a un fatto fisico, noi scegliamo di descriverlo con una certa struttura matematica. Per quel che riguarda il tempo, decidiamo — in base all'esperienza, in base alle leggi fisiche che conosciamo, in base a ciò che ci torna utile — che il tempo è correttamente descritto dalla retta reale. Però potrebbe anche essere diverso.

È poi importante aver chiaro che quando si dice che il tempo s'identifica con la retta reale, con ciò stesso si fanno una serie di asserzioni: si attribuiscono al tempo della fisica una serie di proprietà. Si asserisce che per il tempo valgono tutte le proprietà della retta reale matematica: queste, che sono proprietà matematiche, si traducono in proprietà fisiche che dovrebbero avere un corrispettivo negli strumenti e nelle misure. Eccovi un breve elenco di queste proprietà:

- unidimensionale
- illimitato
- infinito (nel passato e nel futuro)
- lineare (non ramificato)
- aperto
- orientato
- continuo
- assoluto
- ...

Non sono affatto convinto di averle esaurite tutte, eppure probabilmente tra voi ci sarà qualcuno che pensa: "guarda un po' che gli viene in mente; che altro potrebbe essere?"

In effetti sembra ovvio che il tempo fisico debba essere unidimensionale, illimitato (non è la stessa cosa che infinito), infinito (nel passato e nel futuro). E inoltre non ramificato (potrebbe forse succedere che a un certo punto due tempi si dividono: io ho il mio tempo e tu hai il tuo?); aperto (ossia non chiuso: il tempo non torna su se stesso); orientato (si distingue il passato dal futuro); continuo (nel senso del postulato della continuità); assoluto (ciò sta scritto nel fatto che usiamo un unico parametro t per tutta la fisica, per tutti i fenomeni, per tutte le situazioni: sempre quello, c'è un'unica retta reale che descrive il tempo). I puntini li ho messi perché forse si potrebbe continuare.

La cosa su cui m'interessa soffermarmi è questa: se vi mettete a pensare a quali prove sperimentali ci sono di tutte le proprietà del tempo, vi accorgete che in molti casi esse sono abbastanza scarse, o per lo meno sono ristrette, nel senso che si può solo dire che valgono nell'ambito circoscritto della fisica che conosciamo. Non voglio insinuarvi il dubbio che sia tutto sbagliato; sto solo facendo una considerazione epistemologica: non potete dire di avere la prova sperimentale di tutte quelle proprietà del tempo.

Io direi: abbiamo costruito una fisica, la meccanica newtoniana, che si basa su quest'idea del tempo; quella fisica ha rappresentato bene tutti i fatti conosciuti (solo i fatti conosciuti, però). Poi si comincia a parlare di cosmologia, e si sta estrapolando di molti ordini di grandezza al di là degli esperimenti di laboratorio. Ci si deve per lo meno domandare se tutte quelle proprietà del tempo saranno ancora verificate su scala cosmologica. Oppure: ci mettiamo a studiare le particelle, andando sempre più nel piccolo, sempre più nel fino. Abbiamo il dovere di domandarci se tutte quelle proprietà del tempo continuano a essere soddisfatte e verificate a tutte le scale microscopiche che stiamo considerando.

Bisogna essere preparati al fatto che la struttura teorica di base, costruita in relazione a un certo campo di fenomeni, a un certo ambito sperimentale, possa essere rimessa in discussione. Non c'è niente di drammatico se questo succede; anzi, si può dire che sarebbe ben strano se non succedesse. Abbiamo imparato cos'è il tempo nell'arco della nostra vita, degli esperimenti fatti, della nostra storia; e poi vogliamo applicarlo per miliardi di anni, oppure per 20 o 30 ordini di grandezza più in piccolo? Il tempo in quei casi dev'essere ancora uguale? Può darsi di sì o di no: è compito della fisica dare le risposte.

Ci si può domandare allora: a che punto siamo oggi? In una battuta la risposta è questa: l'unico cambiamento finora è proprio quello prodotto dalla relatività. In particolare ciò sta a indicare che — per quanto ne sappiamo fino a oggi — nell'ambito microscopico della fisica delle particelle un cambiamento della natura del tempo non si è ancora imposto. Non che non sia stato pensato, ma non c'è nessuna evidenza sperimentale, nessuna teoria ben fondata che usi un tempo diverso.

Invece quando pensate a tutto il quadro di fenomeni e di studi teorici che prende il nome di relatività, lì sì, che c'è qualcosa di nuovo: la relatività rivoluziona le nostre idee sulla struttura del tempo (questo è proprio l'argomento del nostro corso). Una delle caratteristiche fondamentali della relatività è proprio che obbliga a ripensare la visione newtoniana della natura del tempo. Poteva succedere, ed è successo con la relatività.

Lo spazio assoluto

L'introduzione al concetto di spazio sarà più breve, soprattutto per un motivo: prima ho sottolineato che c'è scarsa attenzione al concetto di tempo nella tradizione dell'insegnamento della fisica. Invece per lo spazio l'attenzione dei testi è maggiore e c'è quindi meno bisogno di porvi l'accento; anche qui ci sono molte cose da dire, ma posso ritenere che in gran parte vi siano già familiari.

Per cominciare, diciamo subito cos'è lo spazio assoluto. Riprendiamo pari pari, sempre dai *Principia*, la frase di Newton:

> "Lo spazio assoluto, per sua natura senza relazione ad alcunché di esterno, rimane sempre uguale e immobile ..."

Anche in questo caso, chi la legge oggi si chiede subito: immobile rispetto a che? Però già ai tempi di Newton su questo si discuteva. Sappiamo tutti che Leibniz ebbe con

Newton contrasti importanti, in particolare proprio su questo punto. Per Leibniz non ha senso parlare di spazio assoluto, né di moto e di quiete assoluta; il moto e la quiete si definiscono sempre rispetto a qualcos'altro, quindi dire spazio immobile è un non senso.

Va detto però che le argomentazioni di Leibniz erano puramente filosofiche, e la fisica è andata avanti senza tenerne conto. La fisica del '700 e dell'800 è stata costruita proprio su questo paradigma: lo spazio è come un ambiente, un teatro; un insieme di postazioni, di pietre miliari, che stanno lì fisse, alle quali ci si riferisce quando si dice che una cosa sta ferma o si muove.

Però attenzione: il fatto che Newton avesse costruito la sua fisica sullo spazio assoluto, non significa che non conoscesse il principio di relatività. Non poteva non conoscerlo perché era stato enunciato oltre 50 anni prima dei *Principia*; il principio di relatività è di Galileo e doveva essergli noto. Newton sapeva che in realtà se ci si mette in un sistema di riferimento che si muove di moto rettilineo uniforme rispetto al suo spazio assoluto, va tutto bene lo stesso. Il suo punto di vista era: lo spazio assoluto esiste; poi accade che se ci si mette in un riferimento in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto allo spazio assoluto, la fisica funziona bene anche lì. Però il vero moto e la vera quiete sono in relazione allo spazio assoluto.

Le unità di lunghezza

Diciamo ora qualcosa sulla misura dello spazio. Occupiamoci in primo luogo dell'unità di lunghezza, come prima ci siamo occupati della definizione dell'unità di tempo. Le unità di lunghezza nascono nella remota antichità per esigenze pratiche e commerciali: misure di terreni, ecc. Sono così nate innumerevoli unità di misura di lunghezza distinte tra loro, che sono sopravvissute a lungo; alcune sopravvivono ancora.

Il metro, l'unità di lunghezza del Sistema Internazionale (SI), nasce nel 1799: la sua definizione iniziale è 1/40 000 000 del meridiano terrestre. Si scopre subito che è una definizione difettosa, perché basata su un campione difficile da misurare bene. Dopo vari tentativi intermedi, nel 1889 il metro viene definito sulla base di un campione di platino-iridio conservato al Bureau des Poids et Mésures di Sèvres, in Francia. Questa definizione ha resistito fino al 1960, quando il metro è stato definito in un modo un po' più immateriale: come un certo multiplo di una certa lunghezza d'onda (non importa qui essere più precisi) dello spettro del ^{86}Kr (isotopo di un gas nobile).

Appena 15 anni fa è cambiato tutto di nuovo: nel 1983 il metro è stato definito in modo da dare un valore determinato alla velocità della luce nel vuoto:

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}.$$

Si vede quindi che l'unità di lunghezza oggi è agganciata all'unità di tempo. La ragione per una tale scelta è che oggi si riescono a misurare molto meglio i tempi delle lunghezze.

Faccio notare che le ultime due definizioni sono assolute: nel caso della definizione che fa ricorso al ^{86}Kr, si prende quel particolare tipo di atomo, che esiste di per sé, con le lunghezze d'onda che emette; il campione non ha bisogno di essere confrontato con niente. La seconda definizione è assoluta perché è legata all'unità di tempo, che a sua volta è misurata con gli orologi al Cesio.

Si dovrebbe ora parlare di come si fanno le misure di lunghezza, che è cosa diversa dal definire un campione di unità. È troppo facile dire che le lunghezze si misurano col metro: dipende, in certi casi è possibile un confronto diretto con un campione, ma in altri occorre usare metodi più complicati. Per esempio: che cosa accade alla scala astronomica, o a maggior ragione alla scala cosmologica (che per noi è interessante)? Come si fa a dare in metri la distanza di una galassia? Ne riparleremo.

Spazio e geometria euclidea

Termino il discorso sullo spazio osservando che la nostra visione dello spazio non si esaurisce con le misure di lunghezza. La geometria (anche questa una matematizzazione dello spazio) non è solo lunghezze; è costruita in termini di lunghezze e di angoli. Bisogna quindi parlare anche di misure di angoli. Per fortuna non c'è bisogno di preoccuparsi delle unità degli angoli: esse esistono di per sé. Si prende l'angolo giro e lo si divide in un certo numero di parti. Ciò si può fare in diversi modi, come sapete bene: con il grado sessagesimale, il grado centesimale, il radiante; comunque sia, l'unità dell'angolo è già contenuta nella definizione stessa di angolo.

Dal punto di vista della fisica, misurare angoli significa disporre di adeguati strumenti: in fondo ci si riconduce sempre a cerchi graduati. Faccio notare che ancor oggi la misura degli angoli è una componente fondamentale della ricerca astronomica e anche astrofisica e cosmologica. Saper fare misure di angoli è cosa fondamentale in astronomia, e ha avuto una grandissima importanza nella storia; le misure angolari hanno consentito di scoprire moltissimi fenomeni astronomici. Qui mi limito semplicemente a segnalare che anche questa è cosa che solitamente non viene messa in evidenza. Gran parte dell'astronomia si è basata a lungo assai più su misure di angoli che non su misure di lunghezze, per la semplice ragione che è molto più facile fare misure precise di angoli, piuttosto che misure (anche non tanto precise) di distanze. E la difficoltà nella misura delle distanze diventa tanto più grande quanto più ci si allontana dalla scala umana: nel caso della cosmologia, questa è oggi la difficoltà centrale nella determinazione dei parametri fondamentali e quindi nella scelta fra possibili modelli di Universo.

Nella fisica newtoniana una differenza essenziale tra il tempo e lo spazio è che mentre il tempo è unidimensionale, lo spazio è tridimensionale; già per questo ha una struttura più complicata. Debbo qui ricordare che fino alla fine del '700 la geometria euclidea era considerata la struttura naturale dello spazio fisico, e anche l'unica geometria possibile. È a quel tempo che si compie un duplice passo: si comprende la possibilità logica di geometrie non euclidee, e insieme nasce il problema di quale sia la "vera" struttura geometrica dello spazio fisico.

È interessante ricordare che lo stesso Gauss tentò esperimenti volti a verificare se la somma degli angoli interni di un triangolo (avente i vertici sulle cime di alcune montagne distanti) fosse un angolo piatto. Va da sé che i risultati furono affermativi: oggi sappiamo che a rigore questo non è vero, ma le deviazioni sono di gran lunga troppo piccole anche per gli strumenti di oggi; quindi non potevano certo essere rilevate da Gauss. Ma è ugualmente importante il nuovo atteggiamento che questo tentativo indica, nei confronti dell'indagine sullo spazio fisico: da quel giorno la geometria dello spazio fisico è diventata materia d'indagine sperimentale. Per avere risposte sulla geometria dello spazio fisico si deve interrogare un fisico sperimentale; le competenze adatte per scoprire quali sono le proprietà dello spazio fisico, sono quelle del fisico sperimentale. Per stabilire se la geometria dello spazio fisico è euclidea o no, ci vuole un esperimento: non è più un problema matematico. Né tanto meno è un problema filosofico: è un problema di fisica.

Ciò non toglie che sia prima che dopo, i fisici hanno ragionato, hanno condotto i loro esperimenti, hanno ricavato i loro risultati teorici appoggiandosi sulla geometria euclidea. Tutta la fisica, fino alla fine dell'800, è costruita sullo spazio euclideo. In qualunque campo di ricerca, un fisico di quel tempo (e del resto, in larga misura anche un fisico di oggi) usava tutto il repertorio di conoscenze della geometria euclidea (triangoli rettangoli, teorema di Pitagora e così via) e la cosa funzionava.

Quindi non c'è solo la prova diretta data dall'esperimento di Gauss; c'è che abbiamo costruito un intero sistema teorico, comprendente la meccanica, l'ottica, la termodinamica, l'elettromagnetismo, al disotto del quale, a fondamento del quale, c'è la geometria euclidea. E tale sistema teorico va bene, cioè ha descritto correttamente il mondo, ha permesso di fare previsioni, di spiegare fenomeni. Se chiedete a un fisico se lo spazio è euclideo, risponderà: io ho messo lo spazio euclideo nelle mie teorie e tutto funziona; questa è una prova (induttiva) che lo spazio è euclideo; non ho mai trovato niente che mi abbia costretto a ritenere che le cose non stiano così, tutto fila liscio.

Un indizio trascurato

C'è in realtà un piccolo punto interrogativo: funziona proprio tutto? A dire il vero c'era almeno un indizio che poteva far dubitare; ma poiché era un unico indizio, che poteva essere spiegato in altri modi mentre non pareva attinente alla struttura dello spazio, non gli fu data importanza per il problema di cui stiamo discutendo ... fino a quando non è arrivato Einstein. Avrete capito che sto parlando del perielio di Mercurio. Il moto del perielio di Mercurio non torna con le previsioni della meccanica e della gravitazione newtoniana. Tutto il resto, tutti i moti dei pianeti, tornava bene; ma il moto del perielio di Mercurio non tornava, anche con i conti più raffinati, più sofisticati, come già si sapevano fare alla fine dell'800. C'erano i famosi, maledetti $43''$ per secolo che non si era riusciti a spiegare.

Il fatto è che si poteva supporre che quell'effetto potesse essere spiegato in altro modo. Tenete conto che quando si arriva a questi livelli di raffinatezza non ci si può limitare al moto dei due corpi, alle famose leggi di Keplero; si deve tener conto che i pianeti si attirano tra loro, il che produce delle "perturbazioni"; questo richiede calcoli molto più complessi. E quei calcoli sono necessariamente approssimati; a volte ci si può annidare qualche trabocchetto. Tra l'altro c'era un precedente nel moto della Luna, che fino a metà dell'800 aveva dato del filo da torcere, perché non tornava bene neppure quello. Poi si era scoperto che era solo questione di cattive approssimazioni nei calcoli...

Per questa e per altre ragioni, gli esperti di meccanica celeste sapevano che non ci si poteva basare solo su quei $43''$ d'arco per dubitare della meccanica newtoniana, e tanto meno della geometria euclidea; ci poteva essere un'altra spiegazione. Poteva esistere un pianeta sconosciuto che perturbava Mercurio (come era accaduto con Urano, perturbato da Nettuno); oppure il Sole poteva non essere esattamente sferico... C'erano quindi diverse spiegazioni possibili per quell'indizio. E così l'indizio rimase lì, finché Einstein, per tutt'altra strada, nel fare i conti del moto di un pianeta secondo la RG, non si accorse che la precessione del perielio di Mercurio si spiegava perfettamente. Non c'era bisogno di cercare nuove spiegazioni: la precessione del perielio di Mercurio discendeva automaticamente, con grande esattezza, dalla teoria della relatività.

Questo mi dà l'occasione per una precisazione epistemologica, a proposito del falsificazionismo. Quando si è prodotta una costruzione teorica sofisticata, un insieme di leggi e concetti che interpretano e spiegano correttamente svariati fenomeni e un grande insieme di dati, può capitare che qualche dato sperimentale rimanga inspiegato; è successo molte volte nella storia della scienza e della fisica in particolare. In questo esempio erano quei $43''$ del perielio di Mercurio. Dato che tutto il resto tornava bene, si pensò: staremo a vedere, prima o poi una spiegazione salterà fuori. Nessuno immaginava che sarebbe stata una spiegazione rivoluzionaria. Solo a posteriori si è visto che quello era l'indizio che occorreva un nuovo modo d'interpretare lo spazio e il tempo, che ha cambiato le nostre idee precedenti.

La deflessione della luce

Vediamo ora un caso esemplare per la discussione sul carattere euclideo dello spazio: la deflessione della luce. Vi presento una situazione semplificata, senza stare a spiegare come si fanno davvero queste osservazioni. Nella fig. 2–2, S è il Sole (la figura non è in scala: il Sole è molto esagerato come dimensioni rispetto alla distanza dalla Terra); T e T$'$ sono due posizioni della Terra a distanza di sei mesi l'una dall'altra; Σ_1 e Σ_2 sono due stelle (che sarebbero assai più lontane se il disegno fosse in scala). Un astronomo può solo misurare gli angoli α e α', mentre non può misurare direttamente gli angoli β_1 e β_2 (il che non vuol dire che non si sappia dire nulla, almeno sul loro ordine di grandezza).

Dalla geometria euclidea segue

$$\alpha' = \alpha + \beta_1 + \beta_2.$$

In particolare si vede che dovrà essere $\alpha' > \alpha$; se la differenza sia piccola o grande dipende da β_1 e β_2. Per le stelle, β_1 e β_2 sono piccolissimi (molto meno di $1''$), poiché Σ_1 e Σ_2 sono molto più lontane di S dalla Terra.

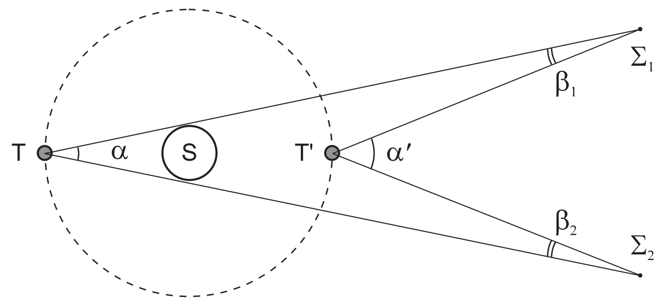


fig. 2–2

Le prime osservazioni sono state fatte nel 1919, poco dopo che la RG aveva fatto una certa previsione. La previsione, confermata dalle osservazioni, dice

$$\alpha - \alpha' = 3.5''$$

se la luce è radente al Sole: notate che α è maggiore di α', non minore. Gli errori di misura (all'inizio grandi) erano però sufficientemente piccoli per garantire che il verso della disuguaglianza era quello previsto. Quindi qualcosa non torna con la geometria euclidea...

L'osservazione delle stelle con la Terra nella posizione T non è facile, perché il Sole sta davanti alle stelle. È possibile solo durante le eclissi totali di Sole. Bisogna quindi recarsi in un luogo in cui l'eclisse è visibile, con tutta la necessaria strumentazione; e non bisogna dimenticare che un'eclisse totale dura pochi minuti, e si è sempre soggetti a incerti meteorologici: basta una nuvoletta in quel momento, e addio misure...

Come ho già ricordato, la prima misura fu fatta nel 1919, ma i risultati furono contestati. Infatti con misure così delicate sono possibili diversi errori sistematici. Un'importante causa di errori è che il telescopio viene necessariamente esposto al sole prima che l'eclisse cominci: ciò provoca un riscaldamento della sua struttura, e conseguenti deformazioni. Inoltre si dev'essere sicuri che anche nel trattamento delle foto, a distanza di tempo dalla ripresa, non si siano introdotte deformazioni significative.

Dato il carattere rivoluzionario della previsione, gli scettici non mancavano, e criticarono aspramente, da tutti i punti di vista possibili, i risultati della spedizione del 1919. Tutto sommato, oggi possiamo dire che la prova del 1919 non fu decisiva per la deflessione gravitazionale, ma fu solo una forte indicazione a favore. Ci volle la ripetizione dell'esperimento più volte, in condizioni via via raffinate, per confermare l'esistenza e l'entità dell'effetto. Oggi le misure si possono fare anche di giorno, usando i quasar e lavorando nel campo delle onde radio; si possono ripetere le misurazioni più volte l'anno, anche con diversi quasar, con la Terra in diverse posizioni.

Le misure di deflessione hanno oggi errori dell'ordine di $0.001''$; non c'è quindi il minimo dubbio che $\alpha > \alpha'$. La differenza torna benissimo con le previsioni di Einstein, ma questo per ora è secondario: l'importante è che al di là di ogni dubbio la relazione ottenuta dalla geometria euclidea è falsificata dall'esperienza. Più difficile è comprendere come si debba interpretare questo fatto.

Nota didattica

Debbo ora fare un'avvertenza: non tutte le cose che dico sono da portare in classe, pari pari come sono. Ho detto e ripetuto che la relatività non va considerata come un argomento isolato: che tutto l'insegnamento della fisica dovrebbe essere integrato allo scopo di preparare il terreno, fin da quando si comincia a parlare di fisica (penso al triennio).

Abbiamo parlato di tempo, di spazio, di unità di misura, di modo di misurarli, di spazio euclideo: è quasi ovvio che questo dovrà essere un argomento iniziale, preparatorio. Ho anche detto infatti che normalmente alle questioni di metrologia dello spazio e del tempo si dà poca importanza, e converrebbe dedicargliene di più. Abbiamo poi discusso gli esperimenti di deflessione gravitazionale. Mi servivano per far vedere fatti sperimentali che dimostrano che il mondo è un po' più complicato di come si credeva all'inizio: la geometria euclidea non è così automaticamente garantita. Questo però non lo ritengo un discorso da presentare all'inizio. Comunque, sulla deflessione gravitazionale della luce avremo occasione di tornare. Quello che è importante dire all'inizio è che noi possiamo sì prendere per valida la geometria euclidea, ma siamo autorizzati a farlo solo in base alle misure: non lo possiamo decidere a priori, con argomenti logici.

Problemi

1. Perché non basterebbe la retta razionale per la matematizzazione del tempo?

È un luogo comune per i fisici dire che in ogni caso ci sono gli errori di misura, per cui i numeri razionali sarebbero più che sufficienti, essendo addirittura densi in $\mathbb{R}$ (si possono infatti trovare due razionali vicini quanto si vuole, mentre gli errori di misura sono in ogni caso finiti). Invece si usano i numeri reali: perché?

2. Quale inconveniente c'è a usare il meridiano come campione di lunghezza? Quale a usare la barra di platino-iridio? Perché questi campioni sono stati abbandonati?

3. In che senso il ^{86}Kr ci dà un'unità assoluta? Perché bisogna specificare un preciso isotopo, e non basta dire Kripton?

4. Quanto vale β_1 se Σ_1 è α Centauri? (distanza $1.3\,\text{parsec} = 4 \cdot 10^{16}\,\text{m}$, $\alpha = 0.01\,\text{rad}$).

5. Esaminare le possibili interpretazioni dell'esperimento di deflessione della luce.

Risposte

Problema 1. (Tempo razionale):

Non è un'esigenza sperimentale, ma teorica. Se vogliamo fare operazioni semplici sulle funzioni che esprimono le leggi orarie (ad esempio ammettere che scelta una posizione intermedia fra quelle iniziale e finale di un moto, esiste un istante nel quale il corpo ci passa) è necessario usare la retta reale. Più esattamente, questa proprietà è espressa dal teorema della funzione continua, che vale per le funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mentre non vale per funzioni definite in Q (retta razionale). Per farla più semplice, avremmo problemi già nel caso di moto uniformemente accelerato. Dato che per trovare il tempo a partire dallo spazio percorso occorre un'estrazione di radice quadrata, non è garantito che il risultato sia razionale.

È interessante notare che l'idea è già presente in Galileo, che in più occasioni insiste sulla continuità del moto. Non a caso, dato che a quel tempo la matematica dei numeri reali non esisteva ancora, gran parte dei suoi ragionamenti sono esposti in forma geometrica.

Problema 2. (Meridiano terrestre):

La lunghezza di un arco di meridiano, a parità di differenza di latitudine, non è sempre la stessa: la Terra non è né sferica né a forma di ellissoide rotondo. Le misure del meridiano non sono facili, e nel corso del tempo hano fornito risultati continuamente variabili. Si sarebbero perciò dovuti cambiare tutti i campioni secondari, i valori di tutte le grandezze fisiche dipendenti dall'unità di lunghezza, ecc. Abbastanza simile è il problema della sbarra di platino-iridio. I limiti con cui si possono individuare le posizioni delle tacche che definiscono il metro fanno sì che la precisione sia bassa, molto minore di quella delle misure ottiche. Inoltre il campione è unico, in un unico luogo: questo rende problematica la riproducibilità (non è una definizione assoluta). È molto migliore un campione che ogni laboratorio può costruirsi di per sé, con maggiore sicurezza ed affidabilità, senza incorrere in errori dovuti a eventuali trasporti di sottocampioni.

Problema 3. (Kripton 86):

Il ^{86}Kr è un'unità assoluta, se si assume che gli atomi siano tutti uguali. Non è male osservare a questo punto quanto siano complesse le basi della metrologia, anche nei casi apparentemente più semplici. Per risalire da una riga spettrale del ^{86}Kr all'unità di lunghezza, padroneggiando tutte le possibili cause di errore, sono necessarie competenze in molti campi della fisica. Se poi si vuol discutere quanto sia fondata l'ipotesi che gli atomi sono tutti uguali tra loro, occorre conoscere a fondo la struttura atomica, e alla fine gran parte della fisica che oggi conosciamo. La fisica sta tutta insieme; quando la si studia e quando la s'insegna, questo non dobbiamo dimenticarlo.

È vero che già la regolarità dei cristalli ha suggerito l'identità degli atomi (e in particolare dell'esistenza di uno stato fondamentale, base della meccanica quantistica); però non è un argomento decisivo: eventuali piccole differenze potrebbero restare inosservate, almeno in uno studio iniziale dei cristalli. A livello microscopico, il problema si ripresenta come identità delle particelle elementari. Ad esempio, se gli elettroni non fossero tutti uguali, non si potrebbe applicare il principio di Pauli e la materia avrebbe proprietà molto differenti da quelle che vediamo.

Quanto al perché bisogna specificare ^{86}Kr: isotopi diversi hanno livelli energetici leggermente diversi perché nella formula dell'energia interviene la massa ridotta dell'elettrone. Variando l'isotopo cambia la massa del nucleo, e quindi varia la massa ridotta dell'elettrone (sulla quarta cifra per l'idrogeno; meno per atomi più pesanti). Per misure di precisione è importante tenerne conto.

Problema 4. (Quanto vale β_1):

Si può usare il teorema dei seni, e si trova circa $0.001''$: siamo al livello della massima precisione oggi raggiungibile. Oggi però, non usando stelle ma quasar, è misurabile la deflessione gravitazionale anche per raggi di luce che passano a 1 UA dal Sole.

Problema 5. (Cosa ci dice l'esperimento sulla deflessione della luce?):

La prima risposta è ovvia: la luce non va in linea retta. Ma cerchiamo di guardare più a fondo. Osservate che per arrivare alla formuletta $\alpha' = \alpha + \beta_1 + \beta_2$ si sono usate due ipotesi:

a) lo spazio è euclideo (vale la geometria euclidea)

b) la luce si propaga in linea retta.

Visto che l'esperimento contraddice la conclusione, abbiamo diverse possibilità:

1) possiamo negare *a*)
2) possiamo negare *b*)
3) possiamo negarle entrambe.

C'è poi una quarta possibilità:

4) La domanda è mal posta.

In realtà l'ultima è la risposta migliore: prima di affermare se lo spazio è euclideo o non euclideo, bisognerebbe sapere che cosa intendiamo per "spazio." Nella fisica newtoniana spazio e tempo, definiti da Newton, stanno ognuno per conto proprio; ma in fisica relativistica l'unico ente che ha un significato intrinseco è lo spazio-tempo. Si pone allora il problema di definire, delimitare, dentro lo spazio-tempo, qualcosa da intendere come "spazio." Solo dopo ci potremo chiedere se questo "spazio" sia euclideo, e se in esso la luce viaggi in linea retta.

LEZIONE 3

Sistemi di riferimento

Continuiamo a riesaminare alcuni argomenti che riguardano l'insegnamento della fisica tradizionale. A parte l'obbiettivo di trattare la relatività, anche la fisica Newtoniana non si può insegnare oggi, alla fine del 20-mo secolo, come 50 anni fa.

Oggi prenderemo in considerazione il concetto di *sistema di riferimento* (brevemente "riferimento"). Già su questo si può fare un'osservazione: se guardiamo un libro di testo di 50 anni fa vediamo che l'interesse a discutere su sistemi di riferimento (inerziali e non), su forze apparenti, sul principio di relatività galileiana, si è sviluppato dopo. Una grossa scossa in questo senso la diede il PSSC, negli anni '60: da allora in poi tutti i testi hanno cominciato a dare spazio ai sistemi di riferimento. In parte perché anche per la fisica avanzata questi argomenti avevano acquistato peso; ma anche perché il lancio dei satelliti artificiali e la presenza di astronauti in orbita ha reso frequente il ritrovarsi a parlare di situazioni in cui il cambiamento di riferimento gioca un ruolo importante.

Sebbene questa non fosse un'innovazione di contenuti, nel senso che non s'insegnava una fisica diversa, sta di fatto che il modo di pensare alle stesse cose è cambiato. Quindi non è vero che la fisica è sempre la stessa. Il concetto di riferimento è fondamentale in tutta la fisica, ma specialmente in meccanica newtoniana e in relatività. Che abbia importanza parlare di rif. quando si fa meccanica, anche newtoniana, è evidente: se si vuole descrivere un moto, occorre prima di tutto fissare il rif. La relatività poi è in gran parte lo studio di cosa succede a cambiare rif.

La prima osservazione importante da fare è che molto spesso un rif. viene identificato con un sistema di coordinate (SC). Si dice di solito: "sia dato un rif. x, y, z" e si disegna una bella terna. Io intendo dissacrare quest'abitudine: insisto che rif. è una cosa e SC è un'altra. Cercherò di spiegare perché, secondo me, ciò su cui bisogna ragionare, su cui bisogna dare idee chiare, è il concetto di rif. Non è bene identificare rif. e SC, per più ragioni. Prima: parlare di rif. significa parlare di fisica, parlare di SC significa fare matematica. È bene non confondere: questa confusione, tra la fisica e la matematica, è sempre in agguato nell'insegnamento.

Seconda buona ragione per cui non è bene confondere, è che in uno stesso rif. si possono usare diversi SC. Possiamo usare coordinate cartesiane orientate diversamente, mentre nell'accezione che voglio darvi di rif. il fatto che io scelga di mettere degli assi orientati diversamente non significa cambiare rif. Di più: nessuno mi obbliga a usare coordinate cartesiane: esistono infiniti possibili SC, e la scelta non riguarda la fisica, ma la matematizzazione del discorso fisico. Certe volte per es. tornano utili le coordinate polari invece delle cartesiane; ma questo non ha niente a che fare con la fisica. Ancora più importante: è vero che le coordinate sono utilissime, ma non sempre; e non sempre sono necessarie. È una tecnica matematica di cui ci si può servire oppure no, senza che questo intacchi il fatto che si stia facendo della fisica. Del resto anche da un punto di vista matematico si può fare della geometria "intrinseca" (o sintetica, contrapposta alla geometria analitica): non sempre un problema geometrico si risolve bene con l'uso delle coordinate. La geometria analitica non è la macchina unica per risolvere i problemi, e lo stesso vale anche nella fisica.

Cercate di non abituare i ragazzi che l'unica maniera in cui si possa affrontare un problema di fisica sia: scegliere certe coordinate (x, y) e poi scrivere le equazioni sulle coordinate. Non è detto che sia l'unica maniera; non è sempre la più semplice, e generalmente non è la più fisica. Il punto di vista intrinseco, quando sia possibile, è preferibile: vedrete che questo discorso ci servirà di riprenderlo a proposito di relatività.

Vi ho portato alcuni argomenti per cui un rif. è una cosa e un SC un'altra: noi che ci occupiamo di fisica dobbiamo prima di tutto stare attenti ai rif. Anche per questo motivo io preferirò dire "riferimento" piuttosto che "sistema di riferimento": tolgo così di mezzo la parola "sistema," che presenta una certa ambiguità.

Ma che cos'è un rif.? Quando parlo di rif., io intendo un ambiente, un laboratorio, quindi *un oggetto fisico reale*, materiale, realmente esistente, concretamente definito. Tra parentesi, un rif. dev'essere rigido: in un laboratorio che mi si deforma sotto il naso, fatto a fisarmonica, diventa problematico eseguire le misure o interpretarle. Intenderò inoltre che questo laboratorio–ambiente sia dotato di tutti gli strumenti di misura di cui ho bisogno. Per questo corso, i soli strumenti di misura di cui avremo bisogno saranno gli strumenti geometrici e gli orologi. Almeno all'inizio non ci servirà altro; più avanti potranno servire anche misuratori di energia, di massa, magari di altre grandezze fisiche. Ma in generale potrebbe servirmi di misurare cariche elettriche, campi... Dovete pensare che dentro un rif., identificato come un laboratorio, una stanza, ci sono tutti gli strumenti che vi servono per fare delle misure, per fare un esperimento. Questo è un rif.

Perciò quando parlo di due diversi rif. dovete pensare a due di questi ambienti, tra loro distinti: tutto qui. Naturalmente niente mi proibisce, se per es. il nostro rif. è quest'aula, di convenire che siano x, y, z risp. le coordinate di un punto rispetto a tre spigoli dall'aula concorrenti in un punto; cioè di usare coordinate cartesiane per identificare i diversi punti. Però invece di prendere quel SC ne posso prendere qualsiasi altro, senza cambiare per questo la fisica; mi cambiano solo i numeri che esprimono le coordinate.

Riferimenti in moto relativo

Dato che un rif. è un ambiente, una stanza, un laboratorio, è anche chiaro che un rif. può essere in moto qualsiasi. Almeno all'inizio non ho nessuna ragione per preferire un certo moto piuttosto che un altro: il rif. si può muovere in tanti modi. Però abbiamo già detto che secondo Newton esiste uno spazio assoluto, fermo, immobile; è allora naturale che si pensi che le leggi della meccanica newtoniana si potranno applicare solo se ci mettiamo in un rif. fermo rispetto allo spazio assoluto: in quiete assoluta. Questo è il primo passo: in questo rif. valgono le leggi della meccanica.

Però Newton sapeva bene che il discorso non finiva lì: dopo la frase che abbiamo già vista, in cui "definisce" lo spazio assoluto, Newton aggiunge che ci sono gli spazi "relativi," quelli che noi chiamiamo rif. in moto qualunque. Newton sa bene, perché prima di lui c'è stato Galileo, che non è necessario un rif. in quiete assoluta per fare della buona fisica: le stesse leggi fisiche valgono anche in altri rif. Inoltre Newton sa che in pratica occorre usare rif. in moto: specialmente ai suoi tempi (ma per la più gran parte anche oggi) la fisica si faceva sulla Terra, che si muove; e per di più non si muove in modo semplice: gira intorno al Sole, ruota su se stessa...

Ci si accorge che con una certa approssimazione le leggi di Newton valgono anche sulla Terra, come se fosse ferma. Questa non è la stessa cosa che ho detto prima: mentre prima ho ricordato che le leggi di Newton valgono esattamente in tutti i riferimenti inerziali (RI), ora sto dicendo che sulla Terra valgono, ma solo approssimativamente. Questo perché, in realtà, la Terra non è un RI. Che sulla Terra le leggi di Newton vadano abbastanza bene si capisce: se così non fosse, come si sarebbero potute scoprire quelle leggi stando sulla Terra? È vero che nel caso di Newton si potrebbe dire che non le ha scoperte facendo esperimenti sulla Terra, ma studiando il moto dei pianeti. Però poi molti fatti sperimentali sono stati raccolti in esperimenti di meccanica terrestre; se questa avesse dato risultati totalmente diversi da quelli previsti da Newton, le cose si sarebbero fatte molto complicate.

Questo è generale: è un problema che vale ad es. anche per la fisica dei gas. Si dice sempre: "le leggi dei gas valgono per i gas ideali e non per quelli reali." Ma se i gas reali non fossero abbastanza vicini ai gas ideali, come sarebbe stato possibile scoprire le leggi dei gas con degli esperimenti? Se il mondo fosse diverso, se i gas che abbiamo a disposizione fossero fortemente diversi dai gas ideali, le leggi dei gas ideali non sarebbero venute fuori dagli esperimenti.

La situazione della meccanica è analoga. La meccanica sulla Terra non sarà rigorosamente newtoniana, perché ci sono gli effetti dovuti alla rotazione ecc.; però questi effetti sono piccoli e li si può correggere come seconda approssimazione. Al principio se ne può fare a meno: abbastanza da poter dire che il moto dei proiettili segue le leggi della meccanica newtoniana, ecc.

La fisica si è sviluppata per approssimazioni successive. Boyle aveva a disposizione gas reali, però (per fortuna) non poteva fare misure troppo precise; nell'ambito delle misure che poteva fare non era in grado di accorgersi delle differenze. Così poté ricavare una legge $PV = \text{cost.}$ che descriveva bene le sue misure. Poi quando le misure si raffinano si scopre che la legge di Boyle non è proprio esatta... Analogamente: si comincia dicendo "i gravi cadono in verticale, di moto uniformemente accelerato"; poi andando avanti qualcuno si accorge che non cadono proprio in verticale (la famosa deviazione verso Est). Per fortuna la si scopre dopo: se quando Galileo ha fatto i famosi esperimenti dalla Torre pendente le sue palle fossero cadute di traverso, addio: forse non avremmo ancora la fisica. Per fortuna, per quello che poteva vedere lui, i gravi cadevano in verticale.

Esempi di riferimenti

È assolutamente necessario dare esempi concreti di diversi rif., presi dalla vita comune, da realtà scientifiche, ecc. Quando si fanno questi discorsi bisogna mettere bene in evidenza che non si tratta di astrazioni. Quando diciamo che esistono diversi rif., li dobbiamo indicare. Qui ho fatto una lista, e volutamente ne ho messi di vari tipi:

– quest'aula
– un'automobile in autostrada
– un'automobile su una strada di montagna
– un ascensore
– un satellite in orbita
– una stazione spaziale sulla Luna
– una giostra
– un "otto volante."

Tutti questi sono ambienti in cui si possono fare delle misure, sono rif. a pieno diritto. Alcuni sono più comodi per i fisici, altri meno; però sono tutti rif. legittimi. È importante far notare subito che l'esistenza di diversi rif. fa nascere un problema: come si trasforma la descrizione di uno stesso moto da diversi rif.? Ci sono alcuni esempi canonici: se sto su un treno che cammina e faccio cadere una cosa, io che sono sul treno la vedo cadere in verticale; come la vede uno che sta fermo sulla banchina della stazione, col treno che gli passa davanti?

Non è importante arrivare subito alla risposta (una parabola): l'importante è rendersi conto che la traiettoria, la velocità, tutte le caratteristiche che descrivono il moto di un oggetto, cambiano a seconda del rif.; e che perciò un problema fondamentale della fisica è indagare su questo cambiamento. Ci sono delle relazioni, delle leggi, delle formule precise? Intanto rendiamoci conto che il carattere e la descrizione del moto dipendono dal rif. (sono *relativi*); poi andremo a chiarire esattamente come ne dipendono.

Mandiamo in pensione gli "osservatori"

Gli esempi servono poi a sottolineare che un rif. è un oggetto reale: una stanza, un'automobile, un treno, una stazione spaziale. Non è una cosa soggettiva, una cosa sognata, pensata, immaginata. Per ragioni analoghe, in relazione con i rif. è bene non usare mai il termine "osservatore." So che è comunissimo usarlo; è così comune che anche se dico che non si deve usare mai, qualche volta mi scapperà. Però se mi scappa voi dovrete dire: "paga pegno."

Perché dico che non è bene usare il termine "osservatore"? Perché c'è poco da fare: quando diciamo "osservatore" siamo portati a pensare a una persona, e quindi introduciamo una connotazione soggettiva: suggeriamo che ciò che si vede dipenda da qualcuno che sta guardando. Mentre invece la cosa importante è ricordare che *le misure di un rif. sono dovute a strumenti.* Ecco perché ho sottolineato prima che un rif. è un laboratorio dotato di strumenti: gli strumenti, in quanto tali, sono *oggettivi*, funzionano per i fatti loro; fanno misure, interagiscono con l'apparato che devo indagare e danno dei risultati, delle risposte, che non dipendono da me o da chiunque li stia usando o guardando.

Sempre sul piano filosofico, è facile equivocare tra la coppia soggettivo/oggettivo e la coppia assoluto/relativo. Quello che voglio sottolineare ora è che le misure (per es. il moto, la velocità) dipendono dal rif., quindi sono *relative*: non si può parlare in assoluto di velocità, ma solo rispetto ad un certo rif. Ma questo non ha niente a che fare col fatto che siano *soggettive*, cioè che c'entri qualcuno che percepisce, qualcuno che osserva: sono relative ma sono *oggettive*. Non bisogna confondere una coppia con l'altra. Questa è filosofia; ma purtroppo è proprio dai filosofi che talvolta arrivano delle confusioni su questo punto. Quindi è bene essere preparati.

Per rafforzare il concetto, faccio notare che a volte un rif., come nel caso di una sonda spaziale, porta strumenti telecomandati. Ci sono esempi recenti: pensate alla sonda Giotto, che è passata vicino alla cometa di Halley. La sonda viaggiava per i fatti suoi, aveva dentro strumenti di vario tipo: elettrometri, magnetometri, tutto quello che poteva servire. Da terra riceveva i comandi di cosa fare e rimandava indietro le misure. Non c'era nessuno a bordo, ovviamente. Abbiamo quindi un laboratorio con degli strumenti, un rif., in cui si facevano delle misure. Se volete chiamare osservatori i fisici che leggevano queste misure, essi stavano però in tutt'altro posto, che non aveva niente a che vedere con la posizione e il moto della sonda.

Quindi l'accoppiamento tra un rif. e qualcuno che ci vive dentro non è necessario: può capitare, ma può darsi anche di no. In ogni caso le misure sono lì, e sono oggettive. Potranno anche essere sbagliate, ad es. se qualcosa ha fatto funzionare male gli strumenti; ma essere sbagliate è diverso da essere soggettive. Sono oggettive nel senso che qualunque fisico, sulla Terra o — per quello che ne sappiamo — su Marte o su un altro pianeta della Galassia, può leggerle e ragionarci su in modo del tutto indipendente da dove sta e da chi è.

Queste sono cose che è bene mettere in chiaro: più presto lo si fa e meglio è. Naturalmente, trattandosi di argomenti che richiedono una certa sottigliezza di ragionamento, quindi una certa maturità intellettuale, non possono essere liquidati una volta per tutte all'inizio di un corso di fisica. Sono argomenti che vanno ripresi, approfonditi, richiamati ogni volta che capita l'occasione.

Ma voglio dire, soprattutto, che questi discorsi vanno fatti prima di mettere in ballo la relatività; altrimenti avremo la solita storia, che finché si fa la fisica classica sembra non ci siano problemi d'interpretazione; poi, con la relatività, non si sa più chi è che vede, chi è che misura, che cosa è vero, che cosa è assoluto, che cosa è relativo... E così la relatività appare una cosa strana, piena di paradossi in cui non si capisce niente.

No: questi problemi non sono specifici della relatività. Quello che capita con la relatività è che certe cose, che si dava per scontato fossero assolute, come il tempo, si scopre invece che non lo sono. Ma in linea di principio il problema di come interpretare il risultato delle misure, di riconoscere che uno stesso fenomeno può essere visto da diversi rif.; tutti questi problemi sono inerenti alla fisica in sé: non sono una particolarità della relatività.

Il principio d'inerzia

Prima di entrare nella relatività, è bene discutere un po' più da vicino alcuni aspetti della meccanica newtoniana. Cominciamo dal principio d'inerzia (PI). La sua formulazione standard, un po' abbreviata ma sufficiente per il nostro discorso, è: "un corpo non soggetto a forze si muove di moto rettilineo uniforme." Qui c'è un punto fondamentale e delicato, come sanno tutti, su cui si è discusso molto; quindi non posso certo liquidarlo in quattro battute: mi limito a segnalarlo.

Il punto delicato è: come si fa a sapere che su un corpo non agiscono forze? Naturalmente non si può rispondere: "lo vedo dal fatto che si muove di moto rettilineo uniforme," perché sarebbe un circolo vizioso. Si possono discutere varie vie d'uscita; ma la nostra discussione mira a uno scopo didattico e introduttivo; non mi sembra quindi il caso di proporre soluzioni logicamente complicate, come pure ne esistono. Preferisco dare dei criteri orientativi: come si comporta un fisico?

Quando un fisico sta in laboratorio e fa un esperimento, può aver bisogno di sapere se un certo corpo è soggetto a forze oppure no. Il fisico cerca di fare delle osservazioni, delle misure: qualcosa che gli permetta di stare tranquillo. Per esempio, comincia a controllare se il corpo in questione è lontano da altri corpi.

Ripeto che questi sono criteri orientativi, non prescrizioni rigide; sono solo modi pratici per superare la difficoltà.

Non sempre è possibile tenere il corpo lontano da altri corpi, ma se posso farlo mi sento più tranquillo; perché di solito le forze dipendono dalla distanza: maggiore è la distanza e più la forza è piccola. Se non è possibile (e del resto, non sarebbe sempre sufficiente) si ricorre ad altri espedienti: per es. si cerca di mettere degli schermi.

Pensate alla misura della costante di gravitazione: qui le forze che occorre misurare sono le piccolissime forze gravitazionali. Una delle difficoltà è che ci potrebbero essere in giro cariche elettriche, che producono forze molto più grandi di quelle gravitazionali, tali da rovinare la misura. Allora che si fa? Si racchiudono i corpi in gioco in una gabbia di Faraday, in modo da assicurarsi che all'interno il campo elettrico sia nullo.

Questo era solo un esempio. Ci sono diverse procedure pratiche con cui ci si può garantire, in base alla fisica che sappiamo, che il corpo che c'interessa sia libero da ogni possibile azione dovuta ad altri corpi. Può darsi che gli altri corpi siano lontani, oppure si usa uno schermo; o magari le due cose insieme: dipende dal tipo di esperimento, non si può dare una regola generale.

C'è poi un altro criterio da usare. Le forze non hanno un'origine magica: se avete il sospetto che il corpo sia soggetto a una forza, dovete anche identificarne il "colpevole." Ogni forza ha un agente che la produce; inoltre esiste una reciprocità, che poi è il terzo principio della dinamica. Se il corpo A produce una forza sul corpo B, il corpo B produce una forza su A. Quindi non ci può essere una forza che agisce da sé: agisce perché c'è un altro corpo, che poi risentirà la reazione.

In ogni caso, se ho il sospetto che ci sia una forza devo dire dove può stare il colpevole; se non riesco a trovare un colpevole vuol dire che non è corretto parlare di forza: la spiegazione di quello che vedo può essere un'altra. Quindi il criterio: cercare il colpevole, l'agente, per decidere se c'è o non c'è una forza.

Occorre notare che tutti questi criteri non sono logicamente inattaccabili: usandoli non ci si mette a posto dal punto di vista della logica. Ma la fisica non è la logica. A qualcuno può dispiacere, ci si può sentire a disagio; qualcuno invece dice: "è questo il bello." Bisogna aver chiaro che quando si parla di fisica, e a maggior ragione quando si comincia a insegnare la fisica, non la si deve presentare come una scienza logicamente ineccepibile, una scienza deduttiva. Voi dovete mostrare come ragiona un fisico: come impara a conoscere, a controllare le cose che fa, a prevedere i fenomeni, ecc. Che è un discorso tutto diverso dal dare una struttura logica (premesse, deduzioni, ecc.) più o meno rigorosa.

Il principio di relatività

Torniamo al PI: abbiamo già detto che vale in primo luogo in un rif. in quiete assoluta; ma inoltre (lo aveva già detto Galileo) vale anche in un rif. in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a quello assoluto. Più avanti torneremo su questo punto, per capire come lo si possa riformulare nel momento in cui rinunciamo allo spazio assoluto. Che tutti i RI siano equivalenti dal punto di vista fisico, cioè che tutte le leggi fisiche valgano nello stesso modo in tutti questi rif., è il principio di relatività (PR), che trova il suo primo enunciato esplicito nel *Dialogo sui Massimi Sistemi* (1632): oltre 50 anni prima che Newton scriva i *Principia*.

C'è un modo utile per enunciare il PR, facile da ricordare e inoltre di valore pratico, in quanto fornisce un metodo operativo per sapere se il PR vale o no. Lo chiamerò il "principio del taccuino." In ogni laboratorio di fisica che si rispetti c'è un quaderno, in cui il fisico annota i risultati degli esperimenti, ma più in generale tutto quello che accade. Il principio del taccuino dice:

> *se due fisici* A *e* B *fanno esperimenti in due diversi* RI, *non è possibile riconoscere* A *da* B *con la sola lettura dei loro taccuini.*

Questo perché gli esperimenti che sono possibili per A lo sono anche per B. Badate: non sto dicendo che realmente A e B abbiano fatto esperimenti identici. Può darsi che A abbia provato ad accelerare una particella con un campo di 300 V/m e B invece abbia usato un campo di 400 V/m; perciò A scriverà: "con un campo di 300 V/m ho trovato che, in un dato percorso, la mia particella ha acquistato una data energia," mentre B troverà che, in un altro dato percorso, la sua particella acquisterà un'altra data energia. Non è necessario che gli esperimenti abbiano tutti i numeri uguali; ma quell'esperimento, da cui naturalmente risulta la conservazione dell'energia, torna bene nel rif. A e nel rif. B, nel senso che se A e B si scambiano i quaderni, leggono i risultati di esperimenti perfettamente possibili nel loro rif. Quindi non c'è modo di accorgersi qual è il quaderno di A e quale quello di B, perché i risultati descritti rappresentano la stessa fisica: in questo senso sono indistinguibili.

Se invece, quando provo a fare l'esperimento, mi riesce diverso in A e in B, allora il PR non vale. Galileo dice: se vi mettete in una stanza sotto coperta di una nave e saltate, giocate, fate quello che vi pare, da ciò non riuscirete a capire se la nave sta ferma o se cammina (supponendo che cammini in un mare senza onde, senza disturbi). Questa è appunto la formulazione galileiana del PR.

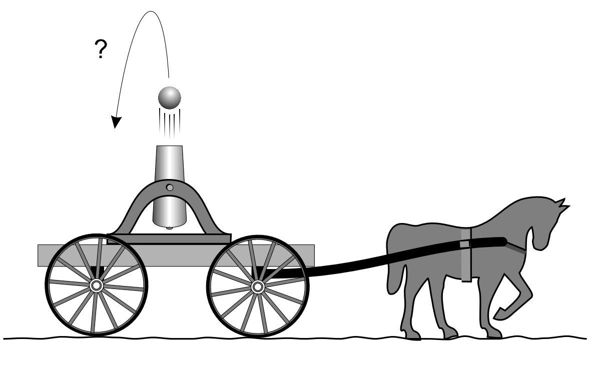


fig. 3–1

Faccio notare che nel programma scientifico-filosofico di Galileo il PR ha un ruolo centrale. È molto di più di una casuale osservazione: se vale il PR, è impossibile decidere se la Terra è ferma o si muove. Cadono così molte obiezioni al sistema copernicano. Dunque nel *Dialogo* il PR è funzionale alla difesa del sistema copernicano.

E adesso un altro discorso, che ha sempre a che fare con il PR. Galileo fa un esempio classico di applicazione del PR (fig. 3–1): "Se prendo un cannone e lo dirigo in verticale, quando sparo la palla va su e ricade nella bocca del cannone. Ora prendo il cannone, lo metto su un carro, e frusto il cavallo: quello parte di gran galoppo. A questo punto sparo il cannone . . ." Simplicio dice che la palla del cannone cadrà all'indietro, perché il cannone si è spostato mentre la palla è in aria. Salviati dice che la palla non parte in verticale rispetto a terra: ha anche la velocità del carro; quindi descrive una parabola in avanti e ricasca giusto nella bocca del cannone. Anzi: ci casca così bene che non urta nemmeno, perché nel tempo in cui la palla percorre la bocca del cannone, questa cammina in avanti proprio con la stessa velocità della palla; per cui la palla scivola dolcemente dentro la bocca, proprio come se il cannone fosse fermo (fig. 3–2).

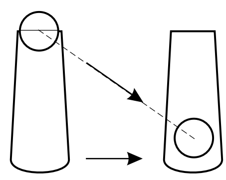


fig. 3–2

Questo è l'argomento di Galileo che illustra il PR: l'esperimento della palla di cannone, fatto nel rif. del carro, è indistinguibile dallo stesso esperimento fatto nel rif. della Terra. Nei due esperimenti il taccuino di un artigliere che sta a terra e quello di un artigliere sul carro sarebbero indistinguibili. Non si può distinguere un rif. dall'altro.

Ma c'è un problema. Galileo porta il suo argomento come prova del PR: succede così e questo dimostra che il PR è vero. Che succeda veramente così, bisogna quindi farlo vedere senza usare il PR; altrimenti è una petizione di principio. Io devo sapere per un'altra strada che le cose vanno così: o perché faccio davvero l'esperimento (che sarebbe la maniera più sicura); oppure perché conosco indipendentemente la fisica del moto dei gravi. Ecco perché Galileo dedica parecchio spazio a studiare il moto dei proiettili in tutte le possibili situazioni.

Dovremo quindi studiare il moto di una palla nel rif. fermo sulla Terra, guardando in particolare come si muove una palla che venga lanciata da un cannone che cammina sul carro. Dovremo far vedere che quella palla descrive una parabola, e che la velocità orizzontale della palla rimane costante, sempre uguale a quella del carro; per cui la palla rimane sempre sulla verticale del carro e ricade dritta nella bocca del cannone. Ma questo lo dovremo fare guardando le cose dal rif. della Terra: non possiamo metterci nell'altro rif., altrimenti usiamo il PR senza averlo dimostrato.

Composizione e indipendenza dei movimenti

Cambio ora angolo di visuale. Non voglio più interessarmi di come ragiona Galileo (che da questo punto di vista si potrebbe anche discutere, ma richiederebbe un'analisi accurata: qualcosa dirò più avanti). A me interessa come ci dovremo comportare noi quando parliamo di queste cose. Lo dico perché in generale nei testi, in relazione a questi argomenti, c'è un po' di confusione. Di solito nello studio del moto dei gravi in due dimensioni entrano in ballo idee come la composizione e scomposizione dei moti e il cosiddetto "principio d'indipendenza dei movimenti."

La domanda è: sono generali queste idee? Esistono in fisica leggi generali di questo tipo, che noi sappiamo essere vere e quindi possiamo usare per capire come si muove un proiettile? Oppure sono solo leggi *ad hoc*, coniate per l'occasione e valide solo in circostanze particolari?

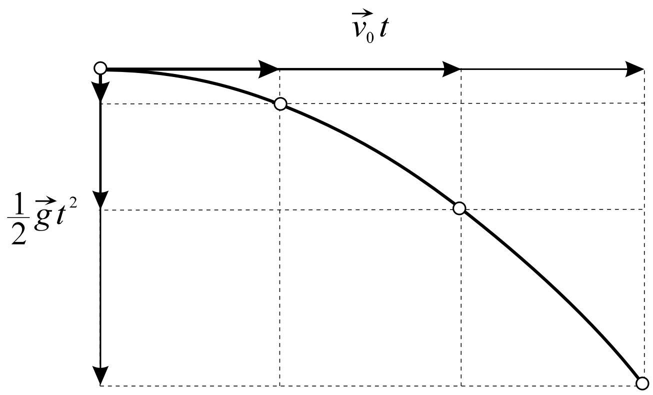


fig. 3–3

Espongo ora quella che credo sia la maniera tradizionale di trattare queste cose. Consideriamo il caso più semplice: quello in cui la velocità iniziale è orizzontale (fig. 3–3). Si dice: io ho due moti, il primo è il moto orizzontale, quello che si avrebbe per inerzia in assenza di gravità. Questo è rettilineo uniforme, quindi nel tempo t lo spostamento è $\vec{v}\,t$. Poi ho il moto verticale, dovuto alla forza di gravità: quello che il grave avrebbe se non gli avessi dato la velocità iniziale, cioè se fosse inizialmente fermo. Questo moto sarà verticale e uniformemente accelerato: lo spostamento nel tempo t sarà $\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$. I due moti sono indipendenti, per cui lo spostamento complessivo è la somma vettoriale (composizione) dei due spostamenti: $\vec{v}\,t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$.

Spero che abbiate notato tutte le freccette: abbiamo due vettori spostamento, uno orizzontale, l'altro verticale. Faccio la somma dei due vettori con la regola del parallelogramma, e trovo la posizione finale. Ho composto (sommato) gli spostamenti dovuti ai due moti: al moto per inerzia e al moto di caduta. Questa è, più o meno, la maniera tradizionale di studiare questi moti.

Galileo, a proposito del cannone, fa invece questo discorso: prendiamo un rif. K (quello della Terra, il laboratorio Terra); poi prendiamo un secondo rif. K′, che è quello sul carro. Studiamo il moto nei due rif. Nel rif. K′, che accompagna in direzione orizzontale il proiettile, questo ha velocità iniziale nulla; quindi in K′ il proiettile cade in verticale, e il suo spostamento è $\frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$. Nel rif. K sulla Terra lo spostamento come si ottiene? Si ottiene componendo lo spostamento in K′ con lo spostamento di K′ rispetto a K. Attenzione: questa volta faccio la composizione del moto relativo col moto di trascinamento, e naturalmente il risultato è di nuovo $\vec{v}\,t + \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2$.

Cosa c'è che non va? Va tutto benissimo, nel senso che tutto quello che è stato detto è vero; però i due discorsi sono diversi. Giungono alla stessa conclusione, giusta, ma sono diversi. Nel primo discorso ho usato l'indipendenza dei movimenti: ho detto che il mio proiettile è dotato di un moto orizzontale e di un moto verticale che si svolgono ciascuno per i fatti propri e si sommano; punto e basta. Non ho parlato di sistemi di riferimento, non ho cambiato rif.: sto sempre nel rif. Terra. Nel secondo discorso invece abbiamo studiato il moto nel rif. K′ e poi l'abbiamo trasformato usando la cosiddetta "trasformazione galileiana," cioè aggiungendoci $\vec{v}\,t$, che mi dà il cambiamento dello spostamento nel passaggio dal rif. K′ a K. È giusto che i due ragionamenti portino allo stesso risultato, perché nella meccanica newtoniana questo è un quadro coerente.

Accennavo prima che se si va a vedere come stanno le cose in Galileo, non è così chiaro: non si capisce bene quale sia per lui il punto di partenza e quale il punto d'arrivo. In realtà lui fa un tutt'uno dei due discorsi: tutte le cose stanno insieme, sono tutte vere e formano la sua visione del moto dei proiettili, che è giusta. Simplicio fa un discorso tutto diverso: dice che il proiettile continua a cadere in verticale anche quando è stato lanciato dal carro, e questo è sbagliato, è contraddetto dall'esperienza.

Ripeto però che il problema è: quelle che abbiamo usato sono leggi generali? Noi nel primo caso abbiamo usato la cosiddetta "composizione dei movimenti"; nel secondo abbiamo detto: "passiamo da un rif. all'altro, usando la trasformazione galileiana." La mia domanda è: ma questo modo di procedere si applica sempre, per ogni problema di meccanica, o non è che per caso abbiamo usato qualcosa che funziona *ad hoc*? Per trovare la risposta, vi propongo due situazioni da studiare come esercizio.

Prima: nel problema come lo abbiamo trattato finora abbiamo dimenticato l'aria. Però per i proiettili veri, anche quelli dei tempi di Galileo, che avevano velocità basse ed erano belle palle massicce, l'aria qualcosa faceva. Se poi provate con un pallone da calcio vi accorgerete che la traiettoria non è una parabola. Allora la domanda è: se voglio tener conto dell'aria, i due discorsi fatti sopra funzionano ancora? Posso usare la composizione dei movimenti? Posso usare il PR e poi passare da K′ a K?

Seconda: se invece del moto di un proiettile sulla superficie della Terra, in una piccola regione di spazio dove il campo gravitazionale è costante, volessi studiare un satellite? Per un satellite in orbita posso usare ancora gli argomenti visti sopra, oppure no? Se sono leggi generali mi aspetto di poterle usare sempre... Provate un po' a ricavare il moto di un satellite con quegli argomenti: vi accorgerete che non funzionano. Ecco quindi la mia tesi: il modo con cui si studiano di solito queste situazioni contiene delle idee *ad hoc*, che non sono sbagliate per quella particolare applicazione, ma non possono essere usate come principi generali. Il cosiddetto "principio d'indipendenza dei movimenti" nella meccanica newtoniana non esiste: può essere usato solo nel caso del campo gravitazionale costante e in qualche altra situazione eccezionale, ma non è una legge generale della fisica. Quindi sarebbe bene non usarlo, perché altrimenti si trasmette l'idea che si possa usare sempre e poi non si riesce a capire come mai in altri casi non funziona.

C'è poi una questione particolare, che posso intitolare "i vettori, questi sconosciuti." Sarebbe interessante sapere se ci sono, e quanti sono, libri di testo che adoperano i vettori per questi problemi. Ho la senzazione che i vettori vengano definiti ma poi ci si riduca sempre a usare le componenti: tutte le formule e le equazioni vengono scritte per le componenti. Si prende un SC (x, y), si studia la componente x del moto, la componente y, e poi si ricompone. Notate la differenza col mio modo di procedere: io ho scritto una somma di vettori.

Discussione

D: Ho una domanda sui criteri orientativi per cui un corpo non è soggetto a forze. Lei ha detto che dev'essere lontano da altri corpi. Però siccome siamo in un riferimento terrestre, è comunque soggetto alla forza di gravità. Quindi il corpo sarà lontano sì da altri corpi, però sempre a contatto con un vincolo, necessario per equilibrare la forza peso.

F: Potrei generalizzare dicendo che le forze ci sono ma sono equilibrate. In parecchi testi, specialmente di tradizione americana, il PI viene enunciato in questo modo: "un corpo non soggetto a forze non equilibrate." Personalmente non mi piace molto, perché così sfugge ancora di più la differenza tra primo e secondo principio. Preferisco che il PI venga enunciato pensando che non ci siano vincoli, che non ci siano reazioni vincolari: il corpo si muove proprio nello spazio. Naturalmente di regola siamo sulla Terra e questo non può avvenire, perché c'è la gravità.

A proposito di primo e secondo principio, debbo dire che non mi emozionano molto le discussioni sulla compatibilità logica, sulla deducibilità di questo da quello, cioè tutte le analisi del tipo se il primo principio è indipendente dal secondo ... non mi sembrano interessanti.

Vorrei giustificare questo da due punti di vista. Il più semplice per cavarmi d'impaccio è che da un punto di vista didattico non è assolutamente consigliabile andare a cavillare tanto su queste cose. È già abbastanza difficile far capire e far usare correttamente i principi della dinamica, come qualunque altro pezzo della fisica, senza bisogno d'ingarbugliarsi dentro disquisizioni di dipendenze logiche... Immagino che quest'argomento troverà il vostro consenso, in qualità di "addetti ai lavori." Poi ho un altro argomento: a me sembra che la struttura di un discorso fisico si veda nel suo insieme. Non m'interessa molto mettermi a discutere, in partenza, il significato preciso del postulato A, del postulato B, ecc. Nell'insieme può esserci benissimo una specie di circolarità, cioè una cosa che si definisce attraverso un'altra che sembra sia stata introdotta *ad hoc*.

Non sono mai stato né tanto preoccupato né tanto sensibile verso critiche del tipo: "ma come, lì introducono questo che fa uso anche di quest'altro ..." Per esempio: spesso s'introduce il secondo principio con un classico esperimento, come quello di un carrello sulla rotaia a cuscino d'aria, messo in movimento dalla trazione di un filo collegato a un peso. Bene: se si va a studiare accuratamente la situazione, si vede che non si può fare a meno di usare anche il terzo principio. Quindi l'esperimento non prova niente di per sé, perché usa il terzo per dimostrare il secondo! Ma la cosa non mi disturba, se la s'intende non come una "dimostrazione" di qualche principio, ma come un'illustrazione, la presa di conoscenza con un fatto sperimentale che suggerisce una certa interpretazione teorica.

Anticipando qualcosa che discuteremo molto più a fondo nel seguito, faccio notare che c'è un buon motivo per cui finora mi sono interessato solo del primo principio:

perché uno dei cambiamenti essenziali apportati da Einstein alla dinamica sta proprio nel ridefinire il RI. Vedremo che per Einstein un rif. in caduta libera è inerziale: in quel rif. la gravità sparisce. Nell'ascensore di Einstein un corpo si muove di moto rettilineo uniforme, quindi è molto più semplice dire che non c'è nessuna forza e vale il PI. Questo spiega perché il criterio che m'interessa è proprio quello del moto rettilineo uniforme di un corpo non soggetto né a forze né a vincoli.

I: Un intervento accenna al fatto che anche Galileo non poteva fare esperimenti in assenza di aria.

F: A questo proposito c'è nei *Discorsi* una bella battuta di Salviati, rivolta a Simplicio:

> "Aristotele dice: 'una palla di ferro di cento libbre, cadendo dall'altezza di cento braccia, arriva in terra prima che una di una libbra sia scesa di un sol braccio'; io dico ch'ell'arrivano nell'istesso tempo; voi trovate, nel farne l'esperienza, che la maggiore anticipa due dita la minore, cioè che quando la grande percuote in terra, l'altra ne è lontana due dita: ora vorreste dopo queste due dita appiattare le novantanove braccia di Aristotele, e parlando solo del mio minimo errore, metter sotto silenzio l'altro massimo."

Sappiamo bene che gli esperimenti nel mondo reale devieranno rispetto al mondo ideale; ma dobbiamo saper riconoscere quelle differenze che possono essere ridotte. Dobbiamo fare il confronto tra due teorie, e le due teorie danno risultati ben distinguibili; se l'esperimento, entro gli errori, e tenuto conto delle possibili perturbazioni esterne, parla nettamente a favore di una delle due, dobbiamo accettare il responso dell'esperimento, e non nasconderci "dietro quelle due dita.".

I: Rileva la difficoltà di presentare la fisica su base sperimentale.

F: Non si deve credere che si possa ricavare tutto dagli esperimenti, e tanto meno da quelli assai modesti che è possibile fare con una classe. Bisogna perciò aver chiaro quale può essere l'obiettivo del lavoro sperimentale.

Ruolo del laboratorio

Prima di tutto, occorre far capire che cosa significa fare un esperimento. Ci si pone l'obbiettivo di misurare qualcosa: ci si scontra inevitabilmente con delle difficoltà; le si studia, le si supera, si migliora l'esperimento... C'è tutto un lavoro che bisogna fare: registrare i dati, confrontarli, analizzarli: è una parte del "mestiere" della ricerca scientifica, che indipendentemente dal fatto che l'esperimento sia primitivo, rozzo, condotto in modo inesperto o viceversa sofisticato, mantiene però certe caratteristiche comuni. E questo va insegnato.

In secondo luogo, cosa che forse si sottolinea meno, bisogna che i ragazzi prendano familiarità con i *fatti*, cioè con le cose che succedono nel mondo; il che, spesso, non richiede nemmeno degli esperimenti, ma richiede solo di guardarsi intorno.

Vi faccio un esempio qualunque: "con che velocità cade una goccia di pioggia?" Cerchiamo di arrivare a farci un'idea di tale velocità; così poi scopriremo che se usiamo la solita formuletta $v = \sqrt{2gh}$ non torna assolutamente.

Ma come faccio a sapere con che velocità cade una goccia di pioggia? Questa non è una legge fisica fondamentale: è una conoscenza di fatto. Una parte del lavoro sperimentale o comunque della riflessione sui fatti sperimentali dovrebbe essere dedicata a questo. E si tratta di un lavoro che si potrebbe fare in buona misura al biennio: prendere conoscenza delle cose che succedono nel mondo, dei fenomeni, degli ordini di grandezza, *fare* delle cose; usare le mani e non solo il cervello.

Diverso è il discorso quando si discute su che cosa si fonda la conoscenza teorica della fisica: anche semplicemente le leggi della dinamica. Non si deve lasciar credere ai ragazzi che mentre loro non sanno fare gli esperimenti di caduta dei gravi, Galileo era più bravo e li ha fatti precisi: non è questo il punto. Noi abbiamo, in ogni caso, strumenti migliori di quelli che aveva Galileo: basta pensare agli orologi. Galileo non è arrivato a quelle idee perché aveva degli strumenti migliori; Newton non ha trovato le leggi della meccanica con la rotaia a cuscino d'aria o con cose del genere…

Il modo come si arriva a capire, e soprattutto il fondamento, cioè la base su cui ci fondiamo per credere a quelle leggi, non sta in quegli esperimenti. Ai tempi del PSSC si discuteva molto sul ruolo che potevano avere i famosi esperimenti coi carrelli e gli elastici, per "verificare" $F = ma$. A mio parere il ruolo è soltanto questo: dare una "sensazione" di quello che succede, e far vedere che più o meno torna; ma non dobbiamo dare a intendere che abbiamo *indotto* dagli esperimenti la seconda legge della dinamica. Essa ha delle basi sperimentali di tutt'altra natura. Se mai, già ai tempi di Newton, le basi sperimentali della seconda legge della dinamica stavano nel moto dei pianeti.

Le frontiere della ricerca

Il vero banco di prova, direi il trionfo, della meccanica di Newton è il sistema solare. Questa, purtroppo, è cosa che resta troppo in ombra nell'insegnamento della fisica. Invece è importantissima, perché nella meccanica del sistema solare ci sta tutto. Ci sta la prima scoperta della legge di gravitazione, confrontando l'accelerazione di gravità sulla Terra con l'accelerazione della Luna; ci sta la deduzione dalle leggi di Newton delle leggi di Keplero, che erano già note dalle osservazioni; c'è infine il potere predittivo della teoria, che culmina, 150 anni dopo, nella scoperta di Nettuno.

È questo il discorso che bisognerebbe fare; e se non si fa, si perde il sapore di che cos'è la fisica. La fisica è questo gioco intrecciato, continuo, di esperimenti così e così, d'invenzioni, d'idee che suggeriscono uno schema teorico, del controllo delle previsioni di quello schema, ecc. Arrivando poi ai risultati che sappiamo. Insomma: abbiamo mandato degli uomini sulla Luna perché la meccanica newtoniana funziona, non è successo che hanno fatto i conti e poi sono andati a finire da un'altra parte.

Va anche ricordato che per tutto il '600, '700 e buona parte dell'800, il problema della meccanica del sistema solare è stato un tema dominante della ricerca fisica: quella era allora ricerca di punta. Noi siamo abituati a sentir dire che la ricerca di punta è la ricerca delle onde gravitazionali, o del bosone di Higgs; ma nel 1750 quali erano i temi di punta della ricerca? Che cosa pensavano quei fisici? Non si può credere che i fisici di allora fossero più stupidi di quelli attuali; anzi, in molti casi… Non erano inferiori a noi: né quanto ad abilità sperimentale, né come capacità teoriche; avevano strumenti diversi, conoscenze complessive minori; appunto perché, grazie a loro, abbiamo imparato molte cose.

Quali erano le frontiere della ricerca scientifica allora? Queste sono cose di cui non si parla mai. Erano ad esempio: spiegare il moto del sistema solare, spiegare perché i pianeti non seguono esattamente le leggi di Keplero. Quando nel 1820 si scoprì il carattere "anomalo" del moto di Urano, gli astronomi si divisero fra quelli che dicevano che ci doveva essere un altro pianeta, e quelli che pensavano che la legge di gravità avesse bisogno di una correzione: forse a grandi distanze non era più esatta.

Ci voleva quindi un programma di ricerca, uno che dicesse: "Io parto dall'ipotesi che la legge di gravitazione è giusta e che ci dev'essere, quindi, un pianeta che perturba il moto di Urano. Non l'abbiamo visto, non sappiamo dove cercarlo e perciò io affronto il problema inverso: sapendo come viene disturbato il moto di Urano, calcolerò dove sta quel pianeta." Allora è stata un'impresa non da poco (oggi sarebbe più semplice, grazie ai computer). Anni di lavoro produssero una previsione: quel pianeta deve stare nel tale posto in cielo. Un certo giorno hanno guardato e l'hanno trovato. Questa è la conferma (nel senso induttivo del termine, non è una prova deduttiva) che la legge di gravitazione funziona, perché il pianeta c'è e con la presenza di quel pianeta torna bene anche il moto di Urano.

Queste storie vanno raccontate. I problemi, la ricerca, le tesi che si contrappongono: la fisica si costruisce così; non è pura induzione dagli esperimenti, né formulazione di principi che non si sa da dove piovono, seguita da una deduzione logica. È un intreccio continuo di entrambe le cose. Far capire che cos'è la fisica richiede questo: si fanno congetture, ipotesi, ci si ragiona su; si fanno dei conti, s'immaginano delle verifiche; si pensa un esperimento, l'esperimento non funziona, ci sono dei problemi...

Problemi

1. Una vettura ferroviaria percorre una discesa, senza attrito, quindi accelerando. Quali esperimenti (all'interno della vettura) potrebbero mostrare che non si tratta di un RI?

Quello che vi chiedo è: proponete qualche esperimento da cui ci si può accorgere che la vettura non è un RI. Se si può: lascio anche aperta la possibilità che la risposta sia negativa.

2. Discutete la validità del "principio d'indipendenza dei movimenti" per un proiettile che si muove nell'aria.

3. Idem, per un satellite in orbita.

4. Cercare su libri di testo come viene trattato il moto dei proiettili:
   - Si fa uso dell'indipendenza e composizione dei movimenti?
   - Si fa uso di un cambiamento di riferimento?
   - Altro?

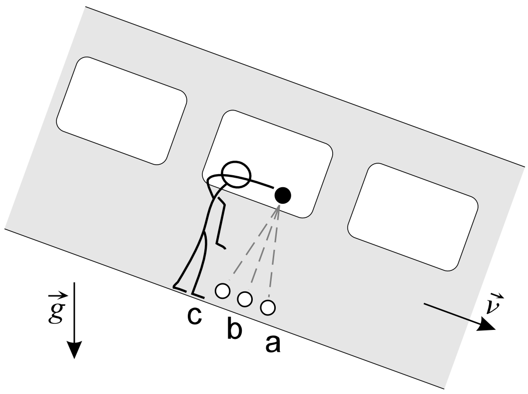


fig. 3–4

Discussione del problema 1:

F: Facciamo un "sondaggio" sulla traiettoria di caduta di un grave all'interno della vettura (fig. 3–4). Risultato: uno solo sostiene la traiettoria a, 12 sostengono la b (perpendicolare al pavimento) e 7 la c.

E ora come la mettiamo? La risposta giusta è la b perché lo dice la maggioranza? In effetti è la b: si può ad es. considerare la forza apparente dovuta all'accelerazione della vettura, e si vede che la sua risultante con la forza di gravità è perpendicolare al piano delle rotaie. Ma se la risposta giusta è la b, qual è la risposta alla domanda del nostro problema?

Abbiamo visto che se mi limito a controllare la direzione della caduta, non mi accorgo di niente. Se il mio vagone fosse stato su un binario orizzontale avrei visto il mio oggetto cadere lungo la perpendicolare al pavimento; lo stesso accade nel vagone in discesa, quindi dalla traiettoria di caduta non posso distinguere tra le due situazioni. Però questo non è l'unico esperimento possibile: abbiamo a disposizione tutti gli strumenti di misura che vogliamo. Possiamo ad es. misurare il tempo di caduta, e lo troveremo diverso. Quindi, se andiamo ad applicare il principio del taccuino, che cosa ne consegue?

Attenzione che la cosa non è banale: il principio non dice che tutte le grandezze misurate debbono risultare uguali. Questo non accade di certo, anche tra due RI, per la velocità. E allora? Provate un po' a pensarci...

I: Dentro la vettura si misura una g diversa. Però se uno non conosce il valore di g nell'altro rif., non si accorge di nulla. Quindi in un rif. accelerato non si trova mai differenza, quando la forza esterna è la gravità o si può ricondurre alla gravità, come una forza apparente. La domanda successiva è: ma questo va bene sempre?

I: Secondo me, qualunque siano le forze, da dentro il rif. non ci si accorge mai se è accelerato o no.

F: Oggi non vorrei approfondire di più il discorso, perché questo sarà il punto di partenza per il nostro approccio alla RG, e non è un argomento da poco. Il problema di cui stiamo discutendo era solo una preparazione.

Anzi, l'ho introdotto anche per mostrare che può essere utile dare problemi prima di aver dato tutti gli strumenti per risolverli: problemi che servano a far pensare... Lì per lì si potranno anche dire cose sbagliate, o per lo meno non chiare; ma servono ugualmente a introdurre un argomento. Quindi: problema usato a scopo di preparazione al lavoro che seguirà. Non è l'uso più comune dei problemi, ma può essere utile e per questo ve l'ho voluto indicare.

I: Il problema in fondo era un altro. Il discorso non è che cos'è un RI, quanto che differenza c'è tra un campo gravitazionale e un campo di forze apparenti. Hanno la stessa struttura o hanno caratteristiche diverse? Tutte le forze apparenti si possono interpretare come dovute a un campo di gravitazione "strano," oppure questo non è possibile? In fondo la forza di gravità nasce dalla materia. Se non c'è materia, a grandissima distanza dalla Terra, per esempio, la gravità non ci deve essere.

F: A proposito di questa osservazione vi devo far notare una cosa. Un carattere distintivo delle strane forze che appaiono in un rif. accelerato, che non è condiviso da altri tipi di forze, per esempio in un campo elettrico, è che sono sempre proporzionali alla massa: è questo che hanno in comune con la gravità. Se c'è un campo elettrico, le particelle cariche lo sentono, le altre no. Le forze gravitazionali e le forze apparenti invece sono entrambe proporzionali alla massa.

Discussione del problema 2:

F: Per capire quello che succede occorre tener presente che ora c'è la resistenza dell'aria, che dipende dalla velocità, ed è diretta in senso opposto a questa (almeno se il pallone non ruota). La dipendenza dalla velocità è complicata, e certo non è lineare, salvo nel caso di velocità molto piccola (regime di Stokes): più spesso, per le velocità che qui interessano, si assume che sia quadratica. Facciamo dunque quest'ipotesi, e scriviamo: $R = -kv^2$.

Però questo è il modulo: se vogliamo trattare i due moti orizzontale e verticale dobbiamo scrivere le componenti R_x (orizzontale) e R_y (verticale). Avremo:

$$R_x = R\,\frac{v_x}{v} = -kv\,v_x$$

e in maniera del tutto analoga:

$$R_y = R\,\frac{v_y}{v} = -kv\,v_y.$$

Applicando la seconda legge:

$$ma_x = R_x = -kv\,v_x = -kv_x\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$
$$ma_y = mg + R_y = mg - kv\,v_y = mg - kv_y\sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

e da queste si vede che il moto lungo x dipende da v_y, e viceversa quello lungo y dipende da v_x. Quindi i due moti *non sono indipendenti.*

Ciò vuol dire ad es. che se lanciate il pallone orizzontale, il tempo che impiega a toccare terra dipende dalla velocità iniziale, mentre secondo le classiche leggi del moto dei proiettili non ne dovrebbe dipendere.

Possiamo anche andare un po' più a fondo, esaminando il caso di un moto generale, sotto l'azione di forze qualsiasi. Consideriamo gli spostamenti infinitesimi dalla quiete, ossia il moto "incipiente," come si diceva una volta: allora se agiscono due forze io conosco l'accelerazione che produce ciascuna, e l'accelerazione del corpo è la somma delle due. Quindi, per quello che riguarda gli spostamenti in piccoli intervalli di tempo, posso considerare separatamente le forze e sommare vettorialmente gli spostamenti prodotti da ciascuna.

Questo però non mi aiuta a risolvere il problema del moto in generale: infatti se le forze dipendono dalla posizione o dalla velocità, lo spostamento iniziale e la variazione di velocità cambiano le forze, e ciascuna forza può cambiare anche in conseguenza del moto prodotto dall'altra. Perciò in generale non si può separare il moto in due moti indipendenti, da comporre in un secondo momento.

I casi in cui la composizione funziona sono:

a) forze costanti

b) forze che dipendono linearmente dalla posizione e/o dalla velocità.

Il primo caso è quello del moto dei gravi in campo uniforme; il secondo è quello dell'oscillatore armonico bi- o tridimensionale.

Ma se i due moti orizzontale e verticale non sono indipendenti, come va che possiamo ottenere lo stesso risultato col PR, ragionando nel rif. K$'$? Il punto è che nella nostra situazione — moto in aria — *il* PR *non si può applicare*. In primo luogo, la velocità orizzontale del pallone non è costante, quindi un rif. che si muove come il pallone *non è inerziale*. Possiamo rimediare definendo K$'$ come quel RI che si muove con la velocità *iniziale* del pallone. Allora è vero che nel rif. K$'$ il pallone cade partendo da fermo, ma c'è un vento, con velocità $-\vec{v}$. Perciò il pallone non cade affatto in verticale, come cadrebbe in K se lo lasciassimo andare da fermo.

Se sapessimo studiare correttamente il moto in K$'$ in presenza di vento, potremmo ancora passare al rif. K al solito modo, e troveremmo il risultato giusto; ma in queste condizioni lo studio del moto in K$'$ non è più semplice di quello in K.

Discussione del problema 3:

Per un satellite in orbita non si può usare il principio d'indipendenza dei movimenti, perché la forza di gravità della Terra sul satellite dipende in grandezza e direzione dalla posizione di questo.

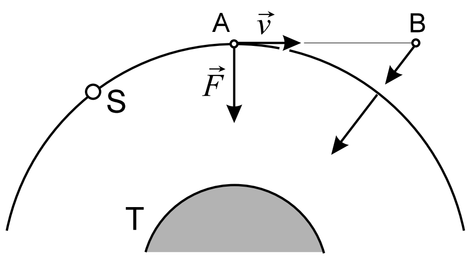


fig. 3–5

Consideriamo per semplicità un'orbita circolare: se a un certo istante il satellite si trova in A (fig. 3–5) e ha velocità $\vec{v}$ (perpendicolare alla congiungente col centro della Terra) il moto dovuto a questa velocità in un tempo Δt lo porterebbe — poniamo — in B. Ora dovremmo comporre questo col moto dovuto alla forza di gravità, calcolato dimenticando la velocità iniziale. È qui che nasce il problema: quale forza bisogna usare?

Se per tutto l'intervallo Δt usiamo la forza $\vec{F}$ calcolata in A, ci troveremo ad aver risolto un problema diverso: quello del moto in campo gravitazionale uniforme, che ci darà una traiettoria parabolica. Dovremmo allora istante per istante modificare la forza, tenendo conto del fatto che il satellite si sta muovendo da A verso B? Anche questo non va bene, perché è chiaro che la forza reale che agisce sul satellite lungo la sua traiettoria circolare sarà maggiore, visto che i punti della retta tangente sono più lontani dalla Terra.

La soluzione giusta sarebe di usare all'istante t la forza con la grandezza e direzione che essa ha nella posizione che il satellite ha raggiunto a quell'istante; ma per sapere quale sarà quella posizione dobbiamo aver prima calcolato il moto... Ci troviamo dunque in un circolo vizioso, che dimostra l'impossibilità di questo modo di procedere.

In realtà il metodo generale, come ben noto, è quello d'integrare le equazioni differenziali del moto, che se vengono scritte in componenti cartesiane sono di nuovo interdipendenti, come nel caso del problema 2. Possiamo semplificarci di molto la vita se imponiamo in partenza che la traiettoria sia circolare: il procedimento vi è ben noto e non ho bisogno di ripeterlo. In questo caso cambia però l'incognita del problema: non è più la traiettoria date posizione e velocità iniziali, ma è invece la velocità iniziale con la quale la traiettoria sarà appunto circolare e del raggio voluto.

LEZIONE 4

Come e perché il moto dei proiettili

Oggi vorrei iniziare riprendendo le considerazioni che abbiamo fatto la volta scorsa sul moto dei proiettili, ma presentandole in forma di traccia didattica.

In primo luogo, penso sia meglio, quando si comincia, non tirare subito in ballo più rif. La cosa abituale, nella pratica didattica corrente, è farli entrare in maniera surrettizia. Si dice: il corpo si muove come se in un altro rif. cadesse in verticale; ma questo può essere un modo di confondere le idee. Non si deve dare già per scontato che ci sia quest'equivalenza di rif.: se mai l'equivalenza dovrà essere il risultato dei nostri ragionamenti.

All'inizio io sto sulla Terra. Voglio capire come si muovono le cose lanciate per aria. Supponiamo di aver imparato, come primo passo, come si muove una cosa che cade in verticale. Abbiamo dunque scoperto che la caduta verticale dei gravi è un moto uniformemente accelerato, con accelerazione costante. A questo proposito mi viene in mente che se si leggono i *Discorsi intorno a due Nuove Scienze* si trova, nel ragionamento di Galileo, una cosa che è incredibilmente moderna. A dire il vero secondo me di cose del genere nei libri di Galileo ce ne sono tante; forse non sono mai stati letti con sufficiente attenzione, per cui è ancora possibile fare delle scoperte.

Che non siano stati letti con grande attenzione, credo si possa spiegare così. Si tratta di classici della storia della scienza, quindi sono più patrimonio di storici e filosofi della scienza che non dei fisici: i fisici si occupano di altre cose. Però per capire quello che ci può essere d'importante dal punto di vista della fisica, ci vuole un fisico. Se chi legge non è un fisico, molte cose possono sfuggirgli.

Ecco l'esempio che dicevo: in quel libro Galileo tratta in primo luogo l'aspetto matematico del moto uniformemente accelerato. Dice: supponiamo che un corpo abbia accelerazione costante, vediamo come si muove. Dimostra che la velocità cresce proporzionalmente al tempo, lo spostamento è proporzionale al quadrato del tempo... A questo fa seguire una serie di teoremi, con le loro brave dimostrazioni, corollari, ecc. Poi a un certo punto dice: ora dobbiamo vedere se le cose vanno così: se i gravi che cadono in natura seguono o no questo tipo di moto. Potrebbe darsi di sì, potrebbe darsi di no.

Tant'è vero che Galileo usa a questo proposito due termini diversi: parla di moto *uniformemente* accelerato (il suo termine è "equabilmente") per il discorso matematico; poi parla di moto *naturalmente* accelerato per la legge fisica di caduta dei gravi. Non è dato sapere a priori se sono la stessa cosa o no: per dire che il moto reale dei gravi nel mondo fisico segue le leggi matematiche del moto accelerato, ci vogliono risultati sperimentali.

Ora questo è un modo di ragionare estremamente moderno: si fa un'ipotesi, se ne sviluppano le conseguenze per via matematica, e poi con l'esperimento si raccolgono i dati che ci daranno o no la conferma della teoria che abbiamo costruito.

L'accelerazione è sempre costante!

Dopo aver verificato sperimentalmente che un grave che cade in verticale si muove di moto uniformemente accelerato, si scopre un altro fatto sperimentale. Se un grave non parte da fermo, ma parte con una velocità iniziale diversa da zero e comunque diretta, il suo moto è quello che vediamo in fig. 4–1. Basta aggiungere vettorialmente, al moto di caduta che il grave avrebbe se partisse da fermo, lo spostamento che farebbe nello stesso tempo con la sua velocità iniziale:

$$\vec{s} = \vec{v}_0\, t + \tfrac{1}{2}\vec{g}\, t^2. \qquad (4\text{–}1)$$

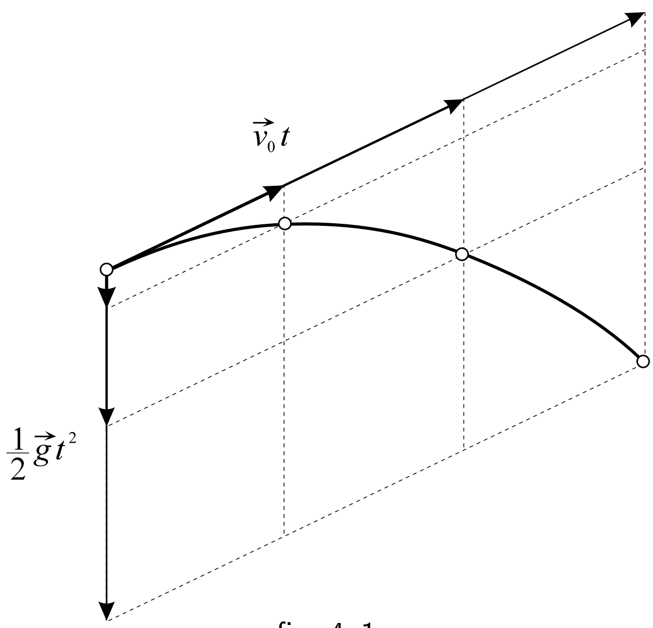


fig. 4–1

Ripeto: questo lo si vede come fatto sperimentale. Ci sono, come sapete, vari modi didatticamente efficaci per farlo vedere.

Ma l'importante è che venga presentato come un fatto sperimentale. L'esperienza ci mostra che così succede; non che così doveva succedere, che è naturale, che è ovvio, che si può dimostrare, o cose del genere. Perché *non è* naturale, *non è* ovvio, e *non si può* dimostrare: potrebbe benissimo muoversi in maniera diversa. Dal fatto che un grave che cade da fermo si muove di moto uniformemente accelerato non segue niente, di per sé, su come si deve muovere se gli do una velocità iniziale.

A meno che, naturalmente, io non sappia già qualcosa. Certo, se so già che il secondo principio della dinamica è una legge lineare, e se so già che la forza di gravità non dipende dalla velocità (per cui è la stessa anche se il corpo si muove con qualunque velocità) allora lo dimostro. Ma Galileo questo non lo sapeva. Notate tra l'altro che Galileo non parla mai di forza di gravità. Ma anche in un insegnamento moderno, quello che mi sembra importante è far vedere che la (4–1) è un fatto sperimentale.

A questo punto, dalla (4–1) imparo che l'accelerazione è sempre uguale a $\vec{g}$, anche con una certa velocità iniziale. Per qualunque corpo, per qualunque moto, con qualunque velocità, l'accelerazione dovuta alla gravità è sempre $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ in verticale. È facile capirlo dalla (4–1), perché il primo termine è un moto senza accelerazione, quindi per l'accelerazione conta solo il secondo termine; ma questo è proprio il moto verticale, del quale so già che ha un'accelerazione diretta verso il basso, costante.

Abbiamo così imparato dall'esperienza che l'accelerazione dei gravi, comunque si muovano (e trascurando l'aria), è sempre la stessa. L'accelerazione non dipende dalle condizioni iniziali, dalla velocità, dalla traiettoria, ecc.

Devo confessare che sono incerto su un punto: non sono sicuro che sia opportuno trattare fin dall'inizio il problema con velocità iniziale qualunque. Potrebbe essere meglio cominciare con velocità orizzontale. Per chi abbia familiarità con l'algebra lineare, sommare due vettori ad angolo qualunque non è diverso dal sommare due vettori ortogonali. Solo che sommare due vettori ortogonali consente di associarli alle coordinate, agli assi cartesiani; argomento più familiare per i principianti.

D'altra parte, c'è anche il rovescio della medaglia: i vettori ortogonali sono solo un caso particolare, e bisogna evitare che lo si consideri l'unico caso in cui ha senso sommare vettori. Ecco perché non sono sicuro.

Cambiamo riferimento

A parte questo, il moto con $\vec{v}_0$ orizzontale è importante perché ci presenta una situazione particolarmente significativa dal punto di vista fisico, che ora voglio discutere. Il punto è che in questo caso riesce naturale introdurre due diversi rif.

Infatti possiamo dire: abbiamo imparato che un grave lanciato orizzontalmente si muove in modo tale che la componente orizzontale del moto e quella verticale si sommano semplicemente; ma allora, se ci mettiamo a guardare le cose da un carretto che si muove in orizzontale con la stessa velocità iniziale del grave, in questo rif. la velocità iniziale del grave non c'è più, e si torna al moto verticale dal quale eravamo partiti all'inizio. Visto che la velocità orizzontale del grave resta costante, se guardo da un rif. che si muove a questa velocità costante $\vec{v}_0$, io accompagno il proiettile, che quindi dal mio punto di vista si muove in verticale.

Ne ricavo che in un rif. con velocità $\vec{v}_0$ il proiettile cade verticalmente. Ossia (il punto importante è quello che viene adesso) si muove come un proiettile che cade da fermo in un rif. fermo. (È proprio vero? V. problema 1.)

Ho dunque due situazioni. La situazione A è la prima che abbiamo vista. Ho la velocità iniziale $\vec{v}_0$ e la legge oraria (4–1): questo nel rif. fisso che chiamerò K. Poi ho la situazione B, nel rif. K$'$ del carretto, che viaggia con la velocità $\vec{v}_0$ uguale a quella iniziale del proiettile: in K$'$ il proiettile cade lungo la verticale. Ma questo è esattamente il moto col quale cadrebbe il grave in K se io l'avessi lasciato cadere con velocità nulla!

Scopro così che il moto di un grave con velocità iniziale $\vec{v}_0$ in un rif. K, se osservato dal rif. K$'$ è uguale al moto in K di un grave che cade da fermo. Dunque se io sono dentro il vagone di un treno e lascio cadere una cosa, quella mi cade ai piedi, anche se il vagone è in movimento.

Non è ovvio affatto che così dovesse essere: pensate la fatica che ha fatto Galileo per farlo accettare. Ma anche oggi non è ovvio. Provate a fare questa domanda: io sono in un treno che viaggia su un binario liscio, senza scosse; lascio cadere una palla. Come cade? Provate a vedere se vi diranno tutti che cade verticalmente, o no. Una certa frazione dirà che rimane indietro; o avrete altre risposte, anche un po' strane. Sto dicendo, in poche parole, che il PR di Galileo non è ancora entrato nel senso comune.

Presentato nel modo che vi ho detto, si tratta di una scoperta: se sto dentro il vagone del treno, per quanto riguarda la caduta dei gravi non mi accorgo che il treno cammina. Questo è esattamente il discorso del vascello, che si trova nel *Dialogo*: è un esempio del PR. È solo un esempio, perché il PR è un fatto generale, non vale solo per il moto dei gravi.

Arrivati qui, bisogna sottolineare che questa proprietà, che in un RI (un vagone in moto, una nave che cammina) i moti si svolgono come quando è fermo, intanto non è scoperta da poco; e poi, che da essa derivano innumerevoli conseguenze. La possiamo quindi considerare come una delle leggi fondamentali della fisica.

Il moto dei proiettili e la relatività

Ho insistito su questo perché ritengo cruciale distinguere bene tra quello che si sa, quello che si può ricavare dall'esperimento, quello che si può dimostrare.

Invece il mio timore è che i testi non facciano sempre chiarezza a tale proposito. Vi invito a controllare se viene ben chiarito che cosa si dimostra, che cosa si ricava dagli esperimenti, che cosa è ovvio, che cosa non lo è. Perché ci possono essere cose che sono ben note, ma non sono ovvie. Bisogna ragionare attentamente, non si può dire "si capisce, dev'essere per forza così." Tant'è vero che Simplicio dice: "è ovvio che la pietra lasciata cadere dall'albero della nave rimarrà indietro," anche se i fatti parlano contro di lui. Per lui è ovvio, nel senso che così dicono i libri dove ha studiato. Ha quindi buon gioco Galileo nel chiedergli: "avete voi fatta mai l'esperienza della nave?"

Notate che tutto questo discorso non ha di per sé a che fare con l'insegnamento della relatività. Se però si ha in programma di arrivare alla relatività, allora è assolutamente fondamentale che anche il moto dei proiettili sia stato fatto nel modo giusto. Tra l'altro, l'obbiettivo d'insegnare la relatività dà una motivazione per affrontare l'argomento in modo corretto. La relatività si basa in modo essenziale su queste cose, non è un pezzo a sé della fisica, un capitolo nuovo. Quindi bisogna pensare bene a come s'insegna: si richiede una diversa consapevolezza.

Di più: il tema della lezione di oggi è che niente impedisce di cominciare a parlare con linguaggio relativistico, cioè con linguaggio moderno, fin dall'inizio. Si può benissimo, fin dalla terza secondo i programmi attuali, cominciare a presentare alcuni aspetti della relatività. Non ci sono, a mio parere, nemmeno delle serie difficoltà di base. Trovo che sarebbe anche utile spiegare ai ragazzi che capire i moti relativi e la caduta dei gravi è un passo necessario per avvicinarsi a quella cosa affascinante e grandiosa che prende il nome di relatività.

Galileo e il PR

Ho già ricordato la volta scorsa a che scopo servisse a Galileo il PR. Gli serviva per far vedere che il sistema copernicano non veniva messo in discussione, non era contestato da certe apparenze: dal fatto che un sasso che cade da una torre non resta indietro, che l'aria non sfugge, ecc.

Vediamo ora come si formula il PR galileiano. Il principio è espresso in quella pagina famosa dei *Massimi Sistemi* che tutti conoscete: un lungo discorso, in cui con diversi esempi si afferma che dentro la nave non ci si può accorgere se la nave cammina. Il PR non ha un enunciato stringato: c'è tutta una conversazione sul tema.

Volendolo esprimere in termini moderni, si può dare un enunciato che anche se più sofisticato contiene esattamente quello che Galileo dice.

Nessun esperimento consente di distinguere due rif. il cui moto relativo è traslatorio rettilineo uniforme.

Questa è una generalizzazione, perché si parla di moto traslatorio rettilineo uniforme qualunque, quindi non solo orizzontale; mentre una nave è in moto orizzontale. Infatti sappiamo che il PR vale anche se il moto relativo è verticale o in qualsiasi direzione: basta che sia uniforme.

Ho detto, non a caso: *nessun* esperimento. Ne riparleremo, però fin d'ora richiamo la vostra attenzione su questo particolare.

Si può formulare il PR in modo un po' diverso:

Tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi in due rif. che si muovono di moto traslatorio rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro.

È quasi la stessa cosa, però c'è una differenza che poi vedremo. E ora la terza formulazione:

Nel passaggio da un rif. a un altro che si muova rispetto al primo di moto traslatorio rettilineo uniforme, tutte le leggi fisiche sono invarianti.

Come contenuto, sto dicendo sempre la stessa cosa; ma le tre formulazioni differiscono per un linguaggio successivamente più astratto. E questo merita attenzione. Una formulazione sarà più adeguata di un'altra a seconda del livello di studi, di preparazione, del tipo di allievi, del tipo di scuola.

La prima, che è la formulazione galileiana in senso proprio, è secondo me accessibile anche agli alunni delle terze. Ragazzi di 16 anni sono in grado di capire questo. Tu stai dentro una nave, o dentro un vagone ferroviario, o dentro un'astronave, quel che ti pare. Bene: se la nave o l'astronave si muove di moto rettilineo uniforme, non te ne accorgi.

È chiaro che quando dico "tu" mi riferisco all'osservatore. Ma il significato prescinde dagli osservatori (li abbiamo pensionati, ricordate?): facciamo degli esperimenti fisici dentro un vagone ferroviario, o dentro una macchina che va con direzione e velocità costante; tutto va come se vagone o macchina fossero fermi.

Nel secondo enunciato introduco la parola "leggi": "tutti i fenomeni fisici seguono le stesse leggi." Con questo aggiungo un'astrazione. Bisogna che il lettore abbia chiaro che cosa significa "legge."

Che cosa vuol dire che in due riferimenti valgono le stesse leggi? La legge fisica è un'astrazione: non è il risultato di un esperimento, ma riassume tutta una serie di esperimenti: secondo principio della dinamica, conservazione dell'energia, teorema di Gauss del campo elettrico, quello che preferite... Tutti questi enunciati generali della fisica non sono risultati diretti di un esperimento: sono la sintesi di una serie di esperimenti, realmente eseguiti o possibili. Quindi capire cosa sia una legge fisica significa aver fatto un certo passo verso una conoscenza astratta, rispetto alla visione immediata: faccio un esperimento e guardo il risultato. Ecco perché il secondo enunciato è accessibile a un livello di maturità superiore, mentre non va bene all'inizio.

Col terzo, peggio ancora. Perché qui non solo si parla di leggi, ma si parla di "invarianza delle leggi fisiche." S'introduce il concetto di *trasformazione delle leggi fisiche* in conseguenza di qualche operazione: nel nostro caso di un cambiamento di rif. Questo mi sembra un linguaggio adatto solo al livello universitario, e forse nemmeno al primo anno.

Ho voluto sottolineare questo tipo di problemi, e il fatto che all'inizio bisogna fermarsi al primo enunciato, per farvi vedere come basti cambiare qualche parola, anche se il contenuto è proprio lo stesso, perché si modifichi la proponibilità didattica, si pongano difficoltà diverse, si richiedano capacità diverse da parte degli allievi.

Torniamo allora al primo enunciato. Anzi, non dimentichiamo che possiamo presentare il PR anche in modo più concreto: il fisico A si è annotato le sue misure, anche B ha fatto lo stesso; le confrontano e trovano che sono eguali (principio del taccuino.) Sarà poi bene far vedere che cosa succede quando ciò non accade: come potrebbe andare un esperimento che falsifica il nostro enunciato.

Un'osservazione, ancora a carattere didattico. Bisogna sempre stare attenti, quando si affrontano questi argomenti, a non metterci dentro troppo. Troppo nel senso di volerli vedere nel quadro più ampio, più sofisticato e più generale possibile. Come ho già detto, non sono particolarmente sensibile a questioni di rigore logico e simili, perché secondo me non sono utili dal punto di vista didattico; a parte il fatto che poi generalmente non se n'esce...

Il PR vale solo per la meccanica?

Un'altra questione che vale la pena di discutere è la seguente. Abbiamo detto "nessun esperimento." E allora ci domandiamo: Il PR galileiano vale solo per la meccanica?

Segnalo la questione perché esiste una tradizione secondo la quale il PR di Galileo è limitato all'ambito dei fenomeni meccanici. La sua estensione, la sua estrapolazione fuori della meccanica, è cosa separata: non è stata considerata da Galileo, e la sua validità va esaminata a parte.

Facendo una piccola parentesi di tipo storico, a me questo dire "Galileo parla solo di meccanica" pare una ricostruzione a posteriori e un po' falsata del suo pensiero. Lo dico per diverse ragioni. Primo: ai tempi di Galileo non esisteva la distinzione della fisica in capitoli, come la conosciamo oggi: la distinzione tra meccanica, ottica, elettromagnetismo, termodinamica, risale in larga misura all'800. Quando la fisica comincia a diventare una struttura abbastanza articolata, con diversi quadri teorici, tra loro piuttosto separati e talora anche in contrasto, allora nasce l'esigenza di definire tutti questi capitoli. Quindi solo nella fisica dell'800 è sensato dire: se parliamo di moti, di velocità, di accelerazioni, di traiettorie, questa è meccanica; mentre non sono così convinto che Galileo avesse questo in mente. Tra l'altro, se andate a rileggere quella famosa pagina dei *Massimi Sistemi* vedrete che Galileo non fa nessuna distinzione.

Non la può fare, perché nella cultura del suo tempo non esiste la meccanica come capitolo a sé della fisica; ma poi non la fa in modo sostanziale, perché quando descrive che cosa fare in quella sala sotto coperta, dice: facciamo tutto quello che ci viene in mente. Parla sì di saltare, lanciare delle palle, ecc. Ma poi ci sono gli uccellini che volano, le mosche, ci sono i pesciolini che nuotano; accendiamo un fuoco al centro della stanza, ci mettiamo a bruciare un po' d'incenso e vediamo il fumo che sale...

Potete anche dire che si tratta sempre e solo di fenomeni meccanici; ma io potrei replicare che questi sono anche fenomeni chimici, biologici: che vanno ben al di là della fisica. Ci sono le farfalle, le mosche, i pesciolini, che si trovano in un ambiente naturale, in cui stanno tranquilli e beati e vivono esattamente nello stesso modo come se la nave stesse ferma. Perciò si potrebbe dire che Galileo sta pure affermando il PR per la biologia, oltre che per la meccanica.

I: Si potrebbe obbiettare che non lo dice esplicitamente.

F: Ma non era nella cultura del suo tempo fare questo tipo di analisi, non rientrava nelle sue conoscenze. Però lui dice: fate quello che volete. Ci potremmo anche lanciare in una specie di "fantascienza": che avrebbe detto per la luce? Ricordate che Galileo aveva provato a misurare la velocità della luce. Come avrebbe risposto se qualcuno gli avesse chiesto: "secondo te la luce dentro la nave si muove con la stessa velocità che se la nave stesse ferma o no?"

I: Dai, la sommava, via!

F: Io non ne sono sicuro. Se gli avessi chiesto del suono? Se io batto le mani, il mio amico all'altro capo della stanza dopo quanto tempo riceve il rumore? Fa differenza se la nave è ferma oppure si muove? Sarete d'accordo con me che non fa differenza. Certo, direte, perché il suono si propaga nell'aria, che si muove con la nave. Voglio solo dire che non è così ovvio che l'avrebbe sommata. Per il suono non avrebbe sommato un bel niente.

D'altra parte ho solo proposto quest'idea a titolo provocatorio. Intendo che non si deve né costringere un testo storico, scritto quasi quattro secoli fa, dentro le forche caudine di come vediamo le cose nei tempi attuali, né è lecito trarne illazioni su cosa avrebbe potuto dire circa argomenti di cui non tratta: bisogna limitare l'indagine entro il quadro delle conoscenze e delle idee del tempo.

Quindi per me non è corretto dire che il principio di Galileo vale solo per la meccanica. Galileo dice che vale nel quadro delle sue conoscenze: punto e basta. Che cosa avrebbe detto se gli si fossero proposti fenomeni come la propagazione della luce, come l'elettromagnetismo, ecc., non lo possiamo dire. Non ha senso! Ma per la stessa ragione non ha senso neppure dire che avrebbe detto di no, che avrebbe ristretto il PR alla sola meccanica. Eppure questo è stato detto nell'800.

Notate però che nell'800 si sapeva un'altra cosa. Nel quadro della meccanica newtoniana, se supponete che sui corpi agiscano forze che sono funzione soltanto delle loro distanze, allora il PR è un teorema. Se ho due sistemi di riferimento che si muovono di moto relativo traslatorio rettilineo uniforme, e se le forze sono funzione solo della distanza, il PR si dimostra. Quindi nell'800 il PR veniva visto come un teorema di meccanica. Dato che l'elettromagnetismo è cosa diversa, non è detto che il teorema debba valere anche lì.

Che cosa ha detto Einstein?

Ecco perché insisto sull'enunciato galileiano: in questa forma il PR non è un teorema di meccanica, è un *enunciato fisico*: fate degli esperimenti, e scoprirete che non potete dire se la nave si muove o sta ferma. Ma se la mettiamo così, è lecito chiedersi: ma allora Einstein che ha fatto? Non ha fatto altro che affermare esplicitamente la validità generale del PR (e non è poco: ci torno fra breve). Facciamo tutti gli esperimenti possibili, e la cosa funziona. Non l'ha detto proprio in questi termini, però... Ecco la citazione di Einstein:

> "Esempi di questo genere [...] portano all'ipotesi che al concetto di quiete assoluta non corrisponda alcuna proprietà dei fenomeni; e ciò non solo nella meccanica, ma anche nell'elettrodinamica. Al contrario, per tutti i sistemi di coordinate [con la nostra terminologia diremmo 'riferimenti'] per i quali valgono le equazioni della meccanica, valgono pure le stesse equazioni elettrodinamiche e ottiche [...] Intendiamo perciò elevare quest'ipotesi (il cui contenuto verrà chiamato nel seguito 'principio della relatività') al rango di postulato [...]"

Ora secondo me questo lo si può dire presto; non c'è bisogno di aver fatto chissà quanta fisica. Potete dire: in ultima analisi, secoli dopo, si è scoperto che quella formulazione di Galileo regge solidamente alla prova degli esperimenti e delle conoscenze: anche quelle di oggi. Ecco che cosa vuol dire "nessun esperimento." Punto e basta! E credo che questo non sia affatto difficile da digerire. Anzi, detto così è molto più semplice.

Tutta la fisica che conosciamo soddisfa il PR. Fate un esperimento qualunque, il primo che vi viene in mente: oggi ne possiamo fare molti di più, possiamo fare un'infinità di esperimenti che Galileo non poteva neppure immaginare. Però il suo successo più importante è questo: la sua formulazione del PR la possiamo trasferire tale e quale nella fisica di oggi, *senza cambiare una virgola.*

Per capire qual è stato il contributo di Einstein, è opportuno un breve riassunto storico. Una trentina di anni prima Maxwell ha proposto, per via teorica, l'esistenza delle onde e.m.; incluso il valore della loro velocità di propagazione.

Se si lascia da parte la corrente di spostamento, le equazioni di Maxwell — comprese le unità di misura, le costanti che vi figurano, ecc. — erano già conosciute, ricavate da esperimenti precedenti. Maxwell non fa altro che aggiungere la corrente di spostamento; ma fatto questo viene fuori, come conseguenza delle equazioni, che devono esistere le onde e.m., con una certa velocità che oggi si chiama c. Nel SI, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$; ma voi sapete che la situazione delle unità e.m. a quel tempo era a dir poco confusa: ce n'erano non so se tre, quattro, cinque sistemi fra elettrostatico, elettromagnetico, di Gauss; e poi razionalizzati o no. Ma qualunque sistema si adottasse, questo non influiva sul valore della velocità: veniva fuori sempre 300 000 km/s.

Poco dopo l'esistenza delle onde e.m. viene dimostrata sperimentalmente. Vorrei sottolineare che non solo le onde e.m. esistono, ma trovano subito importanti applicazioni per la trasmissione d'informazioni a distanza. Ricordo che la radiotelegrafia nel 1905 era già nata (Marconi). Dunque nessun dubbio sull'esistenza delle onde e.m. e sulle loro proprietà. Ma se dalle equazioni di Maxwell risulta che la velocità delle onde e.m. è c, è naturale chiedersi: rispetto a quale riferimento?

A che punto si può parlare del PR?

Ora una piccola parentesi didattica. Dicevo prima che queste cose secondo me si possono insegnare presto. Penso anche che non sia necessario un insegnamento della fisica strettamente deduttivo. Intendo deduttivo non nel senso della logica, ma nel senso che non si possa trattare un argomento senza tutte le necessarie premesse. Quindi, per esempio, che non si possa parlare di onde e.m. se prima non è stato trattato il campo elettrico, il campo magnetico, le leggi dell'induzione, ecc.

Bene: sono del parere che occorra un po' scuotersi. Siamo alla fine del 20-mo secolo, le onde e.m. non solo ci sono, ma le usiamo tutti, fanno parte della nostra vita quotidiana. Non è essenziale che uno sappia esattamente quale teoria fisica c'è dietro, quali sono le strutture matematiche, i concetti con cui i fisici ci sono arrivati. Le onde e.m. esistono. Lo sanno tutti, lo sanno anche i ragazzini che le onde e.m. sono una componente vitale della nostra civiltà. La nostra vita sarebbe tutta diversa senza di esse. Provate a pensarci, solo un momento: cominciando dalla televisione, ma non solo: anche cose più vitali, come la radio e il telefono. Riuscite a immaginarvi senza TV, radio, telefono?

È quindi un fatto che le onde e.m. fanno parte del panorama della conoscenza comune. Ogni giornale parla continuamente di onde e.m., magari a proposito d'inquinamento... E non dico giornali tecnici, parlo dei quotidiani.

Non mi sembra perciò una cosa strana dire all'inizio della fisica che le onde e.m. si propagano con una certa velocità; e non credo sia un problema farlo accettare. Si tratta solo di aggiungere che un certo signor Maxwell l'ha previsto fin dal 1870, e che aveva previsto pure il valore di questa velocità, cioè 300 000 km/s. E basta.

Dopo di che sorge la domanda: va bene, Maxwell aveva previsto che viaggiano alla velocità di 300 000 km/s. Ma misurata rispetto a che cosa? a quale riferimento?

A questa domanda le risposte possibili sono due, questa volta sì su base soltanto logica: o le velocità delle onde e.m. sono diverse nei diversi rif., ossia c'è qualche rif. in cui la velocità è c, e altri in cui non lo è, oppure questa velocità è sempre la stessa. Non ci sono altre possibilità.

Nel primo caso esistono rif. privilegiati, nei quali le onde e.m. viaggiano con velocità c, mentre in ogni altro rif. la velocità risulta diversa. Se è così, le onde e.m. non rispettano il PR. Un fisico nel suo rif. misura la velocità delle onde e.m., e da quello che trova capisce in che rif. sta. Dal momento che le onde e.m. sono una proprietà necessaria del campo e.m., di cui si può calcolare la velocità a partire dalle equazioni di Maxwell, se accade che sperimentalmente in un rif. si trovi una velocità e in un altro una diversa, significa che le leggi della fisica sono diverse nei due rif. Dipendono dal rif., almeno per l'elettromagnetismo.

Nel secondo caso la velocità è sempre la stessa e il PR va bene: la misura della velocità non mi permette di distinguere un rif. dall'altro. Però ora mi trovo nei guai per un altro motivo, perché sarei portato a dire che questo non può essere. Infatti, se la velocità è c in un certo rif., in uno che si muove rispetto al primo con velocità v mi aspetto di trovare $c+v$ o $c-v$, non c. Questo abbiamo imparato dal moto dei proiettili: la velocità del corpo in K$'$ va sommata a quella di K$'$ rispetto a K per avere la velocità del corpo in K.

Quindi ci troviamo di fronte a due alternative: o per l'elettromagnetismo non vale il PR, oppure non vale la legge galileiana di composizione delle velocità. Ma bisogna aver chiaro che fra queste due alternative *non si decide con la logica*. Non ce n'è una che sia per forza giusta, inesorabilmente, mentre l'altra è per forza sbagliata: bisogna vedere. E la novità rivoluzionaria di Einstein è che lui *sceglie la seconda*.

Ma Einstein come ci arriva?

Purtroppo le ragioni per cui Einstein sceglie la seconda non sono alla portata di un insegnamento secondario. Se andate a leggere il classico articolo del 1905, vedrete che il ragionamento è abbastanza complesso: non era affatto semplice concludere che le cose dovessero andare in quel modo. Per capirlo bisogna avere adeguate conoscenze tecniche, ed essere addentro alle discussioni del tempo. Però la conclusione di Einstein è assai chiara e comprensibile: l'ho riportata poco sopra.

Einstein dice: non c'è quiete assoluta; tutti i rif. sono equivalenti, non solo nella meccanica (ricordate quello che dicevo circa il PR come teorema della meccanica?) ma anche nell'elettromagnetismo. Quindi prendiamo questa equivalenza come pricipio base e la chiamiamo "Principio della Relatività." (Nell'originale tedesco c'è la preposizione articolata: "Prinzip der Relativität.")

Ma Einstein come ci arriva? Le sue ragioni non sono sperimentali. L'esperimento di Michelson–Morley era già stato fatto, ma Einstein ha detto esplicitamente che a quel tempo non lo conosceva, o comunque non l'aveva considerato decisivo. Non è questo che l'ha convinto, ma il fatto che ragionando sulle equazioni di Maxwell, si trovavano cose strane, per lui poco soddisfacenti.

Ecco un esempio dello stesso Einstein, che vi posso citare anche se non credo che si possa portare in classe. Forse in quinta, ma non certo in terza. Se considerate il classico esperimento d'induzione e.m. fra un magnete e una bobina, sapete che la legge di Faraday–Neumann funziona bene, dà il risultato giusto, sia quando si muove il magnete, sia quando si muove la bobina. Il problema è che si tratta di due situazioni completamente diverse. Se si muove il magnete, c'è un campo magnetico variabile, e le equazioni di Maxwell ci dicono che sarà presente di conseguenza un campo elettrico. Ma se si muove la spira il campo elettrico non esiste; per spiegare la corrente che si produce nella bobina dobbiamo ricorrere alla forza di Lorentz sugli elettroni.

Quello che c'è di comune fra i due casi è il cambiamento di flusso. Quindi è il moto relativo che conta, come si vede dalla forma integrale della legge dell'induzione, dove si parla solo di variazione del flusso concatenato con la bobina. Però se si assume che esista un rif. privilegiato, allora non si capisce come mai conti solo il moto relativo.

Non è un argomento logico: direi piuttosto che è un argomento estetico. Di fatto vedo che nell'elettromagnetismo c'è questa simmetria: che io muova la spira o che muova il magnete il risultato è lo stesso; però poi mi venite a dire che c'è un rif. assoluto. Non mi piace. Più o meno, questo è il ragionamento di Einstein.

Basi sperimentali del PR

Nasce allora un problema didattico, perché gli argomenti teorici che abbiamo appena visto non si possono usare. Se pensate di basarvi sull'esperimento di Michelson, si tratta comunque di un unico esperimento, a parte difficoltà più serie che dirò fra poco. Per nostra fortuna, da quel tempo è passato quasi un secolo; non c'è quindi nessun motivo per legarci le mani da soli, rimettendoci nella situazione difficile di un secolo fa. In tutto questo tempo sono successe tante cose, abbiamo capito tante cose, abbiamo acquisito capacità tecniche molto più avanzate, abbiamo un sacco d'informazioni in più: dunque usiamole. E con questo apro un discorso che mi sentirete fare più volte.

Quando si parla dell'insegnamento della relatività, una delle prime cose da fare è liberarsi da questo peso, da questo handicap della ricostruzione storica. Noi oggi sappiamo tanta fisica, abbiamo tanta tecnica in più, abbiamo tanti fatti sperimentali; perché dobbiamo obbligarci a insegnare un argomento in maniera complicata, solo per seguire il percorso storico? Non è affatto detto che quella sia la via didatticamente più valida: oggi abbiamo fatti sperimentali molto più eloquenti, che si possono capire senza bisogno di sapere tanta fisica. Pensate all'esperimento di Michelson: quanta fisica bisogna sapere per capirlo? Bisogna sapere di onde, soprattutto interferenza; bisogna conoscere le ipotesi sulla natura della luce: la luce consiste di onde elettromagnetiche, ecc. Ci vuole un intero corso di fisica per arrivare a parlare dell'esperimento di Michelson.

Non crediate poi che per descrivere un esperimento basti un disegno e un po' di parole. Questa è un'illusione, a meno che non ci sia nei ragazzi una certa pratica sperimentale, e la consapevolezza generale di cosa significa fare un esperimento e interpretarlo. Si può credere: ho descritto l'esperimento. Ho fatto una figura; qui c'è l'interferometro, ecco gli specchi, ecco il raggio di luce, ecc. E loro hanno capito che cosa significa veramente l'esperimento. Illusione... Sono esperimenti complessi, e se non vengono capiti, il loro valore didattico di fondamento per gli sviluppi successivi cade miseramente. Per di più, come vi mostrerò, non sono necessari.

Vediamo quindi qualche esempio di prove sperimentali moderne. Comincio coi sistemi di radionavigazione. (Possiamo limitarci al GPS, che è il più moderno e ha ormai sostituito tutti gli altri.) Più avanti spiegherò perché questi sistemi sono prove del PR, e sono prove estremamente semplici ed evidenti. Ora sottolineo che si tratta di apparati pratici, in uso reale; molta gente li usa per mestiere, per esigenze di lavoro. E non funzionerebbero se non valesse il PR, nel senso dell'invarianza della velocità delle onde e.m.

Secondo esempio: le sonde spaziali. Anche qui sto parlando di oggetti reali, direi quasi familiari, di cui si parla continuamente: non si tratta di strumenti racchiusi nei laboratori di fisica. Ma la cosa importante è semplicemente che funzionano. Sono apparati complessi, che contengono computer, laser, oscillatori, strumenti di misura dei più diversi tipi. Li spediamo a varie velocità, li mandiamo in tutte le parti del sistema solare, e funzionano. Sono laboratori che si muovono, a velocità considerevoli, e che vanno bene come se stessero sulla Terra. Questo non è che il PR.

Terzo esempio: stelle, galassie... Anche queste sono dei laboratori in moto. Infatti pensate a tutto quello che sappiamo oggi sulle stelle: come sono fatte dentro, da dove viene l'energia, qual è la loro evoluzione; la spiegazione di tutto ciò la traiamo dalla fisica che abbiamo imparato nei nostri laboratori. Per capire la struttura e l'evoluzione stellare bisogna usare la fisica nucleare, l'elettromagnetismo, la meccanica statistica ... praticamente tutta la fisica che sappiamo e che abbiamo imparata dagli esperimenti fatti sulla Terra.

Ma le stelle non stanno mai ferme (anche se continuiamo a chiamarle stelle fisse): sono in moto anche molto veloce, dell'ordine di 100 km/s o più rispetto a noi. Le galassie hanno velocità di centinaia di km/s. E l'astrofisica riesce a spiegare questi fenomeni con le stesse leggi che valgono nei laboratori terrestri.

Abbiamo dunque dei laboratori in cui viene messa alla prova tutta la fisica che conosciamo, e che si muovono rispetto a noi. La stessa fisica funziona nelle stelle come da noi, quindi vale il PR. Non è difficile raccontare questo. Poi bisognerà spiegare meglio cosa significa che la fisica sulle stelle è uguale a quella sulla Terra. Ma intanto bisogna segnalare questo fatto, che non è ovvio, e mi meraviglia che di solito non venga messo in evidenza.

Riflettete: noi siamo qua, abbiamo studiato un po', abbiamo fatto degli esperimenti, abbiamo capito come son fatti gli atomi, le molecole, i nuclei, come avviene la propagazione della luce, ecc. Abbiamo capito come queste cose vanno sulla Terra. Poi alcuni scienziati hanno detto: cerchiamo di spiegare la struttura delle stelle sulla base di queste cose che sappiamo. E abbiamo visto che funziona. Abbiamo capito perché ci sono certe classi di stelle, perché ci sono i vari stadi di evoluzione, perché ci sono le nane bianche, le giganti, le stelle pulsanti, ecc.

E nello stesso tempo l'astronomia ci ha insegnato che le stelle non stanno ferme. Vi sembra niente questo? Abbiamo questi oggetti che guizzano di qua e di là con le velocità che abbiamo visto: sono quindi rif. in moto rispetto al nostro, e i fenomeni lì dentro si svolgono come se avvenissero sulla Terra. Se questa non è una prova del PR! Abbiamo riprodotto, a grande scala e a grandi velocità, il naviglio di Galileo!

Il Global Positioning System

Vorrei ora fermarmi un po' sul GPS. Lo descrivo molto semplificato, pensando a due soli satelliti geostazionari. In realtà i satelliti usati sono più di due, e non sono geostazionari. Ci conviene prenderli geostazionari, perché così non dobbiamo preoccuparci del loro moto rispetto alla superficie terrestre. Il sistema reale usa satelliti non stazionari perché questo assicura una maggiore copertura della Terra, ma qui non importa.

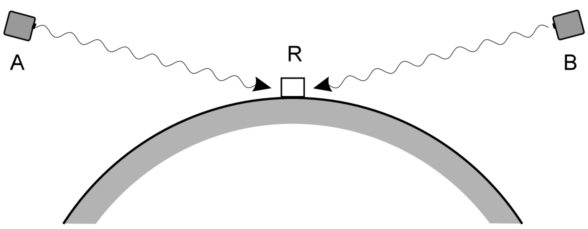


fig. 4–2

Di ciascun satellite è nota la posizione nello spazio; tutti trasmettono dei segnali al nostro ricevitore, qui sulla Terra. I satelliti portano a bordo degli orologi (incidentalmente si tratta di orologi atomici). Il segnale emesso da un satellite contiene, oltre a un codice d'identificazione, l'informazione sul tempo a cui è stato emesso, e i dati necessari per calcolarne la posizione a ogni istante desiderato.

Il ricevitore R (fig. 4–2) riceve il segnale del satellite A a un certo tempo, e sa a che tempo è stato emesso, perché nel segnale è contenuta quest'informazione. Di qui ricava immediatamente l'intervallo di tempo trascorso nel passaggio del segnale da A a R, e la distanza AR. Inoltre è in grado di calcolare la posizione di A nello spazio al tempo di emissione. Idem per B, e così conosciamo anche la distanza BR e la posizione di B. Ragionando nel piano si vede che con le posizioni dei due satelliti e le due distanze AR, BR si trova la posizione di R. Notate che si è usato il fatto che i segnali viaggiano alla velocità c.

Nel sistema reale due satelliti non bastano: in primo luogo perché siamo in tre dimensioni e già questo richiede tre satelliti; poi perché nel sistema come l'ho descritto anche il ricevitore dovrebbe essere dotato di un orologio di qualità adeguata. Si riesce a evitarlo usando almeno 4 satelliti, ma non è necessario ora spiegare come si fa.

A noi interessa invece capire dove entra il PR. Il fatto è che la Terra gira su se stessa e gira intorno al Sole. Quindi un rif. solidale alla Terra non è inerziale: non ha velocità costante né orientamento costante rispetto a un RI. In fig. 4–3 a sinistra è disegnata la situazione a un certo istante; a destra quella 12 ore più tardi. Come vedete, mentre nella prima figura il satellite A sta avanti a B nel senso del moto orbitale della Terra, 12 ore dopo la situazione è scambiata: A sta indietro. Ricordate che la velocità orbitale della Terra è circa 30 km/s: 1/10000 di c.

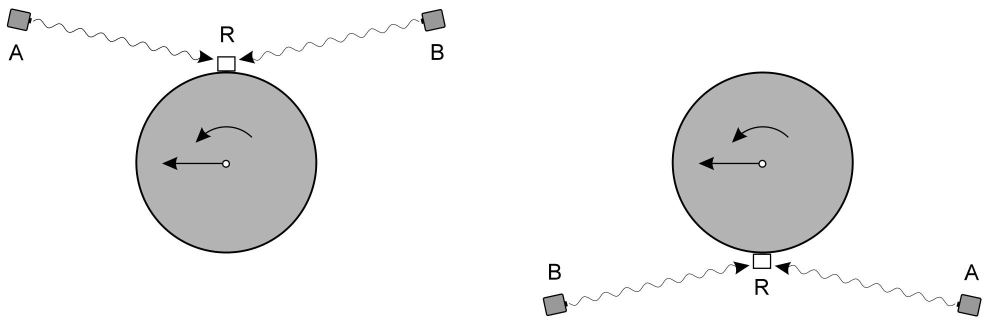


fig. 4–3

Supponiamo ora che la velocità delle onde e.m. in un rif. solidale alla Terra dipenda dal fatto che la Terra si muove: allora l'onda che va da A a R non avrà la stessa velocità di quella che va da B a R. Potremmo pensare che nella situazione di sinistra la prima sia maggiore della seconda, e viceversa nella situazione di destra. Se il software che elabora i dati GPS non ne tiene conto, sbaglia il calcolo della posizione di R: attribuisce alla distanza AR un valore minore del vero, e invece un valore maggiore a BR. Di conseguenza, la posizione calcolata di R risulta spostata verso A rispetto a quella reale. Dodici ore dopo, il ruolo dei due satelliti si è scambiato, e il calcolo della posizione del ricevitore me lo darà spostato verso B.

Se il ricevitore sta in una postazione fissa, io mi accorgerò del problema perché mi sembrerà che R si stia spostando alternativamente avanti e indietro, col periodo di 24 ore. Si potrebbe però ritenere che l'effetto sia comunque piccolo: nei quesiti che vi darò alla fine, chiederò di stimarlo. Vedrete che l'informazione che si ottiene dal GPS è molto significativa. Infatti — inutile dirlo — nessuno ha mai visto, usando il GPS, questa ipotetica oscillazione: il GPS funziona perfettamente in accordo con l'ipotesi che la velocità delle onde e.m. sia sempre c.

Da quando ho imparato com'è fatto il GPS, mi chiedo se quelli che l'hanno progettato erano consapevoli di star usando il PR. Io sospetto di no. Ho idea che il PR, inteso in questo senso, sia una conoscenza di senso comune, che si dà per scontata senza rifletterci su. Credo che per gli ingegneri sia un fatto di senso comune che i segnali viaggiano a velocità c. La Terra gira intorno al Sole? ruota su se stessa? Che importa? chi ci pensa? Dico questo per ribadire che lo stesso fatto che, se preso da un certo lato, sembra profondo quanto complicato, da un altro lato, più pratico, diventa conoscenza di senso comune.(1)

(1) Solo dopo aver tenuto queste lezioni ho scoperto che in realtà la progettazione del GPS pose dei problemi non banali: un cenno lo troverete in nota nella lez. 10.

Il paradosso del condensatore

A proposito di PR, ecco ora un “paradosso,” che però non è un paradosso relativistico in senso proprio: appare un paradosso solo se non si conosce la relatività.

Supponiamo di avere il solito condensatore piano sufficientemente grande (fig. 4–4), per cui siamo sicuri che il campo è uniforme; ho indicato i segni delle cariche e il verso del campo. Da dentro il condensatore — non da fuori, è importante — lancio un elettrone in direzione parallela alle armature, con velocità iniziale $\vec{v}_0$ verso destra: esso viene deviato verso l'armatura positiva, e siccome il campo è uniforme, la traiettoria è una parabola, come per i proiettili sulla Terra. In particolare ciò che m'interessa è che la componente orizzontale della velocità è costante.

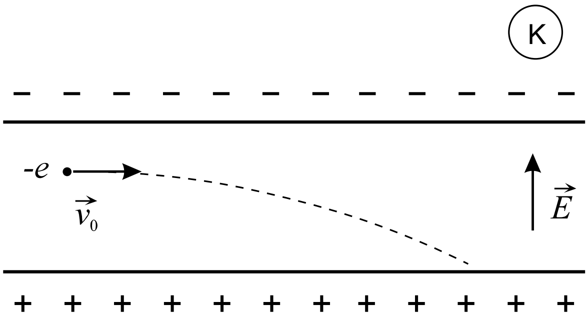


fig. 4–4

Ora passiamo in un rif. che viaggia con la velocità orizzontale dell'elettrone. In questo rif. il condensatore si muove in senso opposto, con velocità $-\vec{v}_0$. Abbiamo dunque sulle due armature cariche negative e cariche positive che vanno verso sinistra, e si hanno due correnti: le frecce in fig. 4–5 indicano i versi delle correnti, che sono ovviamente opposti sulle due armature. Le correnti producono un campo magnetico, che risulta diretto verso l'interno della figura.

In questo rif. l'elettrone è inizialmente fermo. Lo lascio andare e comincia a cadere; cadendo acquista velocità, e con la velocità compare una forza di Lorentz, progressivamente crescente: la forza è tale da deviare l'elettrone verso sinistra. Dunque la velocità orizzontale dell'elettrone, che era nulla all'inizio, poi diventa negativa. Come vedete, in un rif. ho concluso che la velocità orizzontale era costante, nell'altro che non è costante, e ciò non è possibile! Pensateci su.

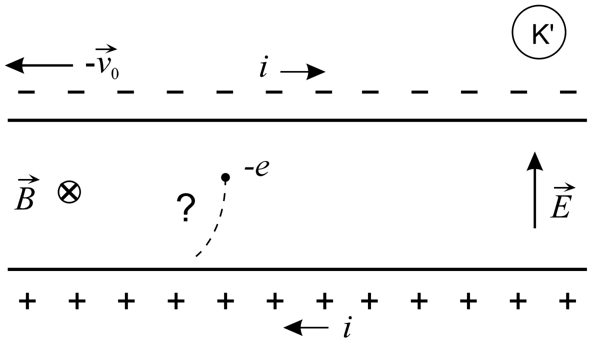


fig. 4–5

I: Abbiamo supposto che il campo nel rif. K′ abbia la stessa direzione che ha nel rif. K. Questo non è automatico: bisognerebbe vedere come cambia il campo elettrico quando le cariche della sorgente sono in movimento.

F: Il problema va esaminato nel suo contesto. Qui si parla di un fisico di un secolo fa, all'incirca. Conosce l'elettromagnetismo, le equazioni di Maxwell le ha già viste, conosce i campi magnetici, ha fatto esperimenti sul moto degli elettroni nei campi magnetici... Quindi sa che il campo elettrico in queste condizioni dipende solo dalla densità di carica presente sulle armature, e non dal fatto che le cariche siano o no in moto. La densità era uniforme in K, e lo è anche in K′: quindi il campo è certamente ancora verticale.

Problemi

1. Avevo detto: in un rif. con velocità $\vec{v}_0$ un proiettile cade verticalmente, come un proiettile che cade da fermo in un rif. fermo. Ora dovrete pensare perché ho scritto “è proprio vero?”

2. Se la velocità delle onde e.m. fosse costante rispetto al Sole, e valesse la legge di composizione galileiana, quanto sbaglierebbe il GPS?

3. Schematizziamo una cavità risonante con due specchi affacciati, tra i quali si riflette un'onda e.m. La frequenza di risonanza è quella alla quale si formano onde stazionarie. Calcolare la variazione di frequenza nelle stesse ipotesi del quesito 2, in funzione della velocità della cavità.

In un rif. in "quiete assoluta" la velocità delle onde e.m. è la stessa nei due sensi, e ne viene fuori una certa frequenza; se il sistema si muove, le onde che viaggiano in un verso e quelle nell'altro non hanno la stessa velocità: come cambia la frequenza di risonanza?

Perché ha interesse questa domanda? Perché se un apparecchio del genere lo metto su una sonda spaziale (e di sicuro ci sono cavità risonanti in una sonda spaziale) allora nelle ipotesi che abbiamo fatto si potrebbe vedere un cambiamento della frequenza di risonanza. Bisogna però stimare quant'è grande il cambiamento: potrebbe non essere osservabile…

4. Sempre nelle stesse ipotesi, come cambia la direzione in cui si vede una stella, a causa del moto orbitale della Terra? (Questo effetto esiste realmente: è la "aberrazione stellare.")

Stavolta il problema è: visto che l'aberrazione esiste, vuol dire che la velocità della luce si compone con quella del sistema di riferimento, oppure no?

5. Studiare il paradosso dell'elettrone nel condensatore. Spiegare (senza fare calcoli, e senza usare la relatività!) qual è la previsione corretta: il moto in K′ sarà solo verticale o no? Dov'è sbagliato il ragionamento (o le ipotesi sottintese)?

Risposte

Problema 1. (Il proiettile cade verticalmente?):

Il problema è la presenza dell'aria, come abbiamo visto nella lezione precedente (problema 2): invito a rileggere quella discussione. Nel rif. K′ (quello che si muove con la velocità orizzontale iniziale del proiettile) c'è un vento con velocità $-\vec{v}_0$, quindi il proiettile *non cade in verticale*. Il PR non vale a causa dell'aria, che è ferma in un rif. ma non nell'altro, e quindi influenza diversamente la caduta di un grave. Due fisici che eseguissero questo esperimento nei due rif. troverebbero risultati diversi.

Invece la validità del PR viene restaurata se il rif. K′ è poniamo lo scompartimento di un treno in corsa, dove l'aria è ferma rispetto a K′. Allora è giusto aspettarsi che tutto vada allo stesso modo come se il treno fosse fermo.

Problema 2. (Se non valesse il PR, di quanto sbaglierebbe il GPS?):

Riferiamoci alla fig. 4–3, e supponiamo per semplicità che A, R, B siano allineati. Sia D la distanza $\overline{\mathrm{AR}} = \overline{\mathrm{BR}}$. Sia poi v la velocità orbitale della Terra (circa 30 km/s).

Nelle ipotesi fatte, nella situazione di sinistra il tempo che il segnale impiega a percorrere il tratto AR è $D/(c+v)$, mentre per il tratto BR è $D/(c-v)$. Se il software del GPS ignora la variazione di velocità, e assume che questa sia sempre c, stima la distanza AR al valore $D' = c\,D/(c-v)$, e la distanza BR al valore $D'' = c\,D/(c+v)$: entrambi i risultati portano ad assumere la posizione di R spostata verso B, di un tratto $D\,v/c$ (a meno di termini di secondo ordine in v/c). Nella situazione di destra, 12 ore dopo, l'errore cambia segno, e il ricevitore appare spostato verso A.

La distanza D è circa 26 000 km (i satelliti GPS non sono geostazionari!) e perciò l'errore ammonta a 2.6 km.

Problema 3. (Risonanza di una cavità):

Si avrà un'onda stazionaria quando il tempo di andata e ritorno è multiplo del periodo T dell'onda. Se l è la distanza tra gli specchi, questo tempo è

$$\tau = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2c\,l}{c^2 - v^2}$$

e la condizione di risonanza $\tau = n\,T$ porta a

$$T = \frac{2c\,l}{n\,(c^2 - v^2)}$$

da cui, per la frequenza:

$$\nu = n\,\frac{c}{2l}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

La correzione è di secondo ordine in v/c: se per es. prendiamo $v = 10\,\mathrm{km/s}$ risulta una diminuzione relativa della frequenza di risonanza di $1.1{\cdot}10^{-9}$. Piccola, ma largamente osservabile con gli strumenti di oggi.

Problema 4. (Aberrazione stellare):

Sia K il RI solidale al (centro del) Sole, K′ quello solidale alla Terra (più esattamente, al suo centro). Sia poi $\vec{v}$ la velocità della Terra in K, e $\vec{c}$ quella della luce, sempre in K (conviene qui pensare alla velocità della luce come vettore). Allora per la velocità $\vec{c}\,'$ della luce in K′ avremo

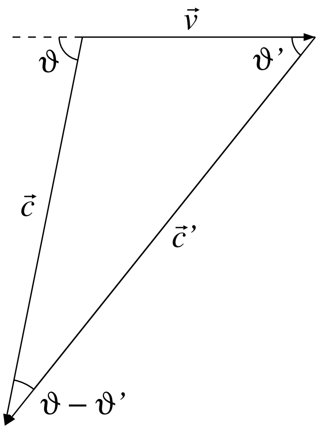


fig. 4–6

$$\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{v}.$$

Dalla fig. 4–6 si vede (teorema dei seni) che

$$\sin(\vartheta - \vartheta') = \frac{v}{c}\,\sin\vartheta' \simeq \frac{v}{c}\,\sin\vartheta. \qquad (4\text{–}2)$$

Dato che $v/c \simeq 10^{-4}$, l'approssimazione è lecita finché bastano 4 cifre. Oggi invece le misure vanno oltre le 4 cifre significative; ma ciò significa che è possibile verificare che la (4–2) non è corretta, anche se non si fa l'approssimazione. Non è corretta proprio perché non lo è l'ipotesi su cui si basa.

Quanto alla seconda domanda, per la risposta, che consiste nella teoria relativistica dell'aberrazione, non abbiamo gli strumenti (e non li avremo neppure alla fine del corso …). Posso quindi dare soltanto una risposta senza giustificazione.

Sicuramente la situazione relativistica non è descritta dala fig. 4–6, se non altro perché in figura si vede che anche il modulo della velocità cambia passando da K a K′. Il fenomeno aberrazione è invece presente anche in relatività, ma la formula (4–2) è sostituita da un'altra, più complicata, che differisce solo per termini di secondo ordine in v/c.

È per questo motivo che nella pratica astronomica solo da poco tempo (forse 20 anni) è stato necessario far uso della forma relativistica dell'aberrazione.

Problema 5. (Il paradosso del condensatore):

Abbiamo già visto che sicuramente nel rif. K′ il campo elettrico è uniforme e verticale, e senza dubbio esiste anche il campo magnetico; quindi la conclusione tratta in K′ è ineccepibile, e dev'essere sbagliata quella in K. Ma dove?

In K abbiamo correttamente osservato che la componente orizzontale della forza è nulla, e ne abbiamo dedotto che deve restare costante la velocità: questo è certamente vero in meccanica newtoniana, e perciò la prima conclusione che possiamo trarre è che *le leggi dell'elettromagnetismo*, da cui abbiamo dedotto la conclusione in K′, *non sono compatibili con la meccanica newtoniana.*

Più esattamente, l'incompatibilità nasce se imponiamo che le leggi dell'elettromagnetismo valgano in K' come in K, ossia se chiediamo di estendere il PR all'elettromagnetismo. Ma che esista questa incompatibilità non è a questo punto una sorpresa: l'avevamo già capito a proposito della velocità della luce.

Per ora non possiamo dire di più; riprenderemo il problema quando avremo fatto conoscenza con la forma relativistica delle leggi della dinamica (lez. 12). Potremo dimostrare a quel punto che la dinamica relativistica risolve il paradosso.

LEZIONE 5

Il principio di equivalenza

Cominciamo col dire che il PE esiste già nella fisica newtoniana, anche se non veniva espresso in questi termini prima di Einstein. Galileo dice: tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione. È bene ricordare che Galileo non parla mai esplicitamente di *forza* di gravità: per questo bisogna arrivare a Newton.

È Newton che mette insieme l'esistenza di una forza universale (la gravità), la scoperta di Galileo, e il suo secondo principio, per concludere: la forza di gravità è proporzionale alla massa del corpo su cui agisce: $F = mg$.

Notate: a questo punto g non indica più l'accelerazione di caduta dei gravi, ma l'intensità del campo gravitazionale. Infatti $F = mg$ è l'esatta analoga di $F = qE$ per le forze elettriche. O viceversa: si postula (così fa Newton) che la forza sia proporzionale alla massa, e allora dalla seconda legge si dimostra che l'accelerazione è la stessa per tutti i corpi.

Si usa anche esprimere la proprietà della gravitazione (proporzionalità alla massa del corpo su cui agisce) dicendo che massa inerziale e gravitazionale sono proporzionali. La motivazione per introdurre due masse la ritengo fin troppo nota per doverla ripetere; tuttavia nello spirito della RG, e in fondo anche per ragioni didattiche, ritengo meglio non introdurre due masse per poi subito ridurle a una. Applicherei il ben noto rasoio di Occam: "entia non sunt multiplicanda præter necessitatem." Visto che una massa basta, perché introdurne due?

Si dice: perché a priori potrebbero anche essere diverse. Ma che vuol dire "a priori"? Noi costruiamo i nostri schemi teorici in base a quello che i fatti sperimentali ci mostrano. I fatti sperimentali mostrano che la forza di gravità è proporzionale alla massa, e non c'è altro da dire.

Anche se non è strettamente necessario per il resto del discorso, faccio notare che a questo punto la proporzionalità della forza di gravità alla massa della sorgente segue dal terzo principio. Infatti se la forza che A esercita su B è proporzionale alla massa di B, e questa è anche (in modulo) la forza che B esercita su A, ecco che quest'ultima forza è proporzionale alla massa del corpo sorgente.

Si può chiedere perché?

Torniamo al punto centrale. Ci si può porre una domanda: perché mai $F = mg$? Nella fisica prima di Einstein questo è un fatto accertato (più avanti discuteremo le verifiche sperimentali) ma senza spiegazione. È vero che si può dire che la ricerca di "spiegazioni" non è necessaria: abbiamo i fatti sperimentali, dai quali ricaviamo una legge. Tuttavia la ricerca di spiegazioni non è sterile, e proprio questo esempio lo dimostra. Einstein si chiede: che motivo c'è che due cose così diverse come gravità e inerzia risultino così strettamente imparentate? È da qui che nasce la sua scoperta: assumere il PE come legge universale della fisica, e trasformare la gravità in un fatto geometrico. Ma su questo torneremo ampiamente.

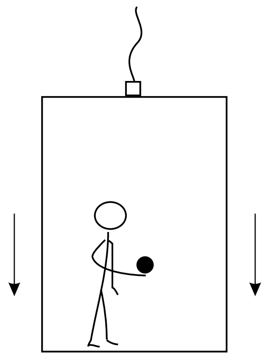


fig. 5–1

Un'altra conseguenza della proporzionalità discende dal fatto che anche le forze apparenti in un rif. accelerato sono proporzionali alla massa (non occorre più distinguere se inerziale e gravitazionale: sono una cosa sola) per cui in un rif. in "caduta libera" (ascensore di Einstein, fig. 5–1) la forza di gravità si cancella. Infatti la forza di gravità agente su un corpo vale $m\vec{g}$, ma c'è poi la forza apparente $-m\vec{a}$. Però l'accelerazione $\vec{a}$ dell'ascensore vale proprio $\vec{g}$, quindi le due forze hanno uguale modulo e versi opposti. Brevemente si dice: nell'ascensore che cade le cose sono "senza peso."

Faccio notare che l'esposizione che ho appena dato indica una linea didattica (a parte la digressione sulle due masse, che invece ho suggerito di dimenticare).

Illustrazioni sperimentali

L'importanza dell'ultimo risultato è tale che sono opportune numerose illustrazioni sperimentali. Ne indico due che si possono fare con mezzi semplicissimi:

1. la bottiglia bucata
2. tavoletta e barrette.

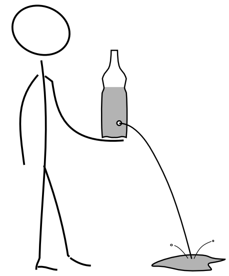


fig. 5–2

1\. Si prende una bottiglia di plastica (da acqua minerale); si riempie d'acqua e si fanno dei forellini sulla parete, vicino al fondo. Se la bottiglia è stappata, l'acqua zampilla dai forellini (fig. 5–2).

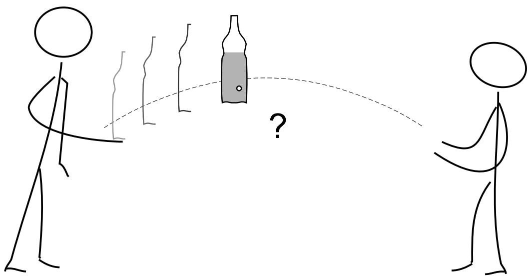


fig. 5–3

Ora si lascia cadere la bottiglia, o la si lancia a un compagno (senza farla ruotare): si constata che durante il volo l'acqua non esce (fig. 5–3). Dunque quando la bottiglia è in volo (caduta libera) nel suo rif. la gravità non c'è più.

Questo è ovvio: la pressione dell'acqua sovrastante, dovuta alla gravità, spinge l'acqua fuori. C'è anche la legge di Torricelli che dice come la velocità del getto dipende da g e da h (altezza del liquido): $v = \sqrt{2gh}$.

2\. Si prepara una tavoletta di legno, due barrette metalliche e un robusto elastico (fig. 5–4). L'elastico va da A a B, passando sotto la tavoletta. La tensione dell'elastico dev'essere tale da non riuscire a sollevare le barrette, ma per poco. In queste condizioni il peso delle barrette è maggiore della tensione dell'elastico (più esattamente, si debbono confrontare i momenti) e le barrette restano appoggiate sulla tavoletta.

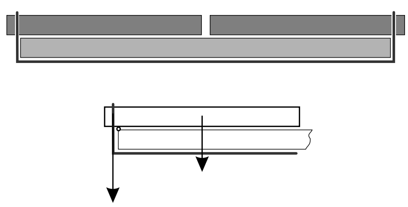


fig. 5–4

Si lascia cadere la tavoletta ... e le barrette schizzano via, a grande distanza (fig. 5–5), mostrando che nel rif. in caduta libera il peso delle barrette non c'è più, e l'elastico è libero di agire come una fionda.

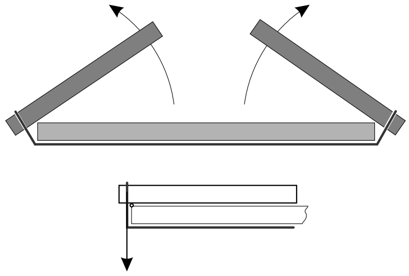


fig. 5–5

Riferimenti in caduta libera

Attenzione: quando parliamo di rif. in caduta libera non intendiamo dire solo in moto verticale (questo è già mostrato dalla bottiglia, che può essere lanciata "a parabola"). In generale, intendiamo che il rif. (laboratorio) si muove sotto l'azione della sola gravità. Il laboratorio può essere ad es. in orbita attorno alla Terra (satellite artificiale). È per questo che in un satellite "i corpi sono senza peso"; non perché siamo lontani dalla Terra.

Ci sono in proposito due errori molto comuni fra i ragazzi. Il primo è di credere che il satellite sia fuori del campo gravitazionale terrestre. A questo si debbono fare due obiezioni: la prima è che il campo si estende anche molto lontano dalla Terra, com'è provato, tra l'altro, dal moto della Luna; la seconda è che molti satelliti artificiali distano qualche centinaio di km dalla superficie della Terra, ossia una distanza piccola rispetto al raggio della Terra. E dato che il campo va come $1/r^2$...

Il secondo errore, che a noi può sembrare assurdo, ma che è facile constatare, consiste nel credere che non ci sia gravità perché c'è il vuoto. Si fa cioè confusione tra pressione atmosferica e gravità. Questo errore è forse causato (o aggravato) dal presentare la pressione atmosferica come qualcosa che spinge dall'alto verso il basso, senza approfondire il discorso. Tra l'altro, è vero il viceversa: nel caso di un'atmosfera planetaria, a differenza di un gas racchiuso in un recipiente, è la gravità la causa della pressione: se non ci fosse la gravità non potrebbe esistere un'atmosfera stabile (e infatti sulla Luna, a causa di una gravità alquanto minore, un'atmosfera non si è potuta formare).

Tornando al rif. in caduta libera: questo può anche essere una sonda spaziale, che percorre una traiettoria complicata, eventualmente passando vicino a diversi pianeti. Sapete che questi passaggi in vicinanza dei pianeti vengono frequentemente sfruttati per aumentare la velocità delle sonde ("effetto fionda"): quindi il moto di una tale sonda è tutt'altro che semplice. Certo non è un'orbita kepleriana. Ma qualunque sia il suo moto, se è dovuto alla sola gravità, parleremo sempre di "caduta libera."

Ancora: il rif. in caduta libera può essere un pianeta: ad es. la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole, e per questo motivo sulla Terra la forza di gravità del Sole "non si sente." In altre parole: la Terra è un rif. accelerato ($a = 6 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$) ma la forza apparente dovuta a quest'accelerazione è compensata dalla forza di gravità del Sole, e la Terra può essere trattata come RI (approssimativamente, se si trascurano gli effetti di marea; ne riparleremo).

Il problema del palloncino

Da un altro punto di vista, le forze apparenti in un rif. accelerato possono essere viste come una "gravità apparente," che però non si distingue da quella "reale." Esempio: un bambino sta seduto in un treno e tiene il filo di un palloncino. Il treno frena: da che parte si sposta il palloncino (fig. 5–6)?

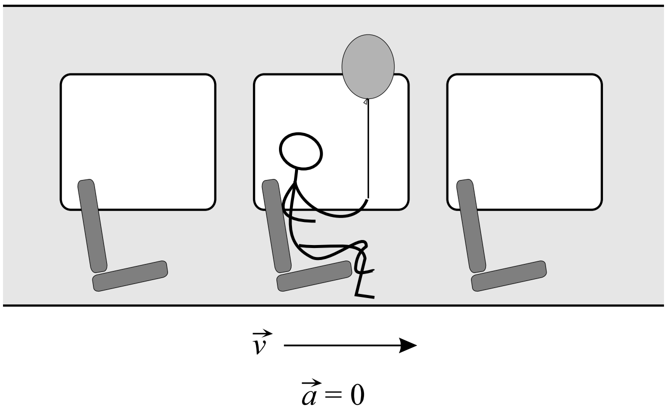


fig. 5–6

Risposta:

1) Oltre al campo "reale" $\vec{g}$ c'è ora il campo "apparente" $\vec{g}_1$, e la gravità risultante è $\vec{g}' = \vec{g} + \vec{g}_1$.
2) Il filo del palloncino sta "verticale," ossia nella direzione della gravità risultante.
3) Il palloncino si sposta *all'indietro* (fig. 5–7).

Ci si può chiedere: ma che cosa fa spostare il palloncino? Rispondo con un'altra domanda: che cosa lo fa stare in alto nelle condizioni consuete? La spinta di Archimede. E come mai c'è la spinta di Archimede? Perché la pressione dell'aria non è la stessa su tutta la superficie del pallone: in basso è maggiore (perché l'aria *pesa*) e perciò la risultante delle forze dovute alla pressione atmosferica è diretta verso l'alto.

Nel treno che frena, che cosa accade all'aria? Viene spinta in avanti dalla forza apparente; quindi la sua densità e pressione aumentano, se pure di pochissimo, nella parte anteriore dello scompartimento, oltre che dall'alto verso il basso. Perciò ora la risultante delle forze di pressione non è più verticale (verso l'alto) ma ha anche una componente all'indietro. E il palloncino si dispone in modo che la tensione del filo possa equilibrare questa forza (o meglio, l'eccesso di questa forza sul "peso" del pallone).

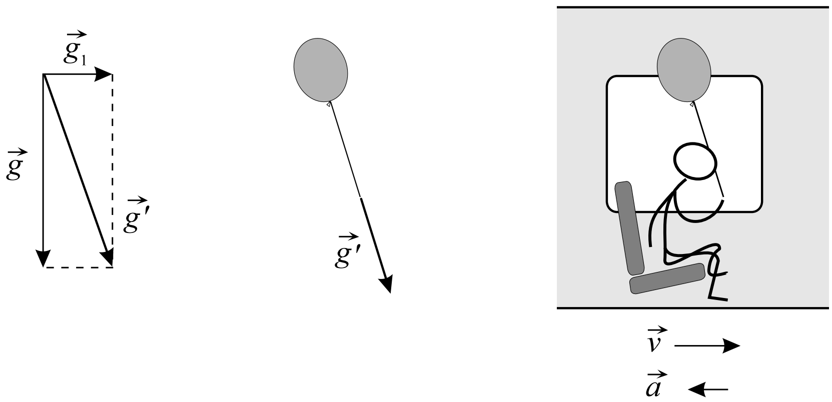


fig. 5–7

Verifiche storiche del PE

A. Galileo (la scoperta).

Ne abbiamo già parlato, e non c'è niente da aggiungere.

B. Newton e il pendolo.

Nei *Principia* Newton afferma di aver sperimentato con pendoli di uguale lunghezza, le cui masse erano diverse per grandezza e costituzione, e di aver verificato (dice entro 10^{-3}) che il periodo dipende solo dalla lunghezza.

C. Newton e i satelliti di Giove.

Sempre nei *Principia*, Newton osserva che i satelliti si muovono attorno a Giove *come se il Sole non ci fosse*, e ne conclude che la forza di attrazione del Sole su Giove, e quelle sui satelliti, stanno in proporzione alle masse. Più esattamente, Newton osserva che se le cose non stessero così, il centro dell'orbita di un satellite non potrebbe coincidere col centro di Giove, come invece accade; e dà anche una stima quantitativa della deviazione conseguente. In termini moderni: nel rif. di Giove la forza di attrazione del Sole sui satelliti *è compensata* dalla forza apparente del rif. Oppure: nel rif. di Giove, che è *in caduta libera*, il campo gravitazionale del Sole *si cancella*.

Problemi

1. Se la forza di attrazione del Sole influenzasse la caduta dei gravi, di quanto si sposterebbe il punto di caduta di un sasso lasciato dalla Torre Pendente (52 m) tra la mattina e la sera (fig. 5–8)?

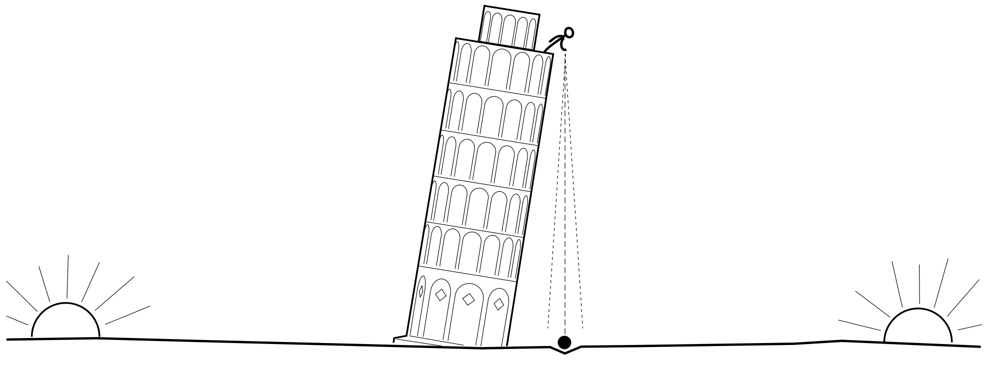


fig. 5–8

2. Risolvere il problema del palloncino:
   a) Calcolare la differenza di pressione tra il punto più alto e il più basso per un palloncino di diametro 20 cm.
   b) Stimare la differenza nella pressione dell'aria fra le due pareti (anteriore e posteriore) di uno scompartimento, mentre il treno frena con accelerazione $0.2\,g$.

3. Un bambino seduto nello scompartimento di un treno tiene in mano un piccolo pendolo, ossia una pallina pesante appesa a un filo, e si diverte a farlo oscillare in un piano parallelo alla direzione di marcia del treno. Trova che il periodo è esattamente di un secondo quando il treno sta fermo in stazione.

Quanto vale il periodo se il treno viaggia a 120 km/h in linea retta, in piano, e senza scosse?

A un certo momento il treno comincia una lunga frenata, con accelerazione costante di modulo $1\,\mathrm{m/s^2}$. Qual è la posizione di equilibrio del pendolo durante la frenata? Quanto vale in queste condizioni il periodo di oscillazione?

Risolvere il problema:

a) nel modo tradizionale

b) usando il PE.

4. Supponiamo, per semplificare, che la forza tra Giove e un satellite sia elastica. Se per il satellite, ferma restando la massa, la forza di attrazione del Sole fosse dell'1 per mille maggiore di quella che è, di quanto si sposterebbe il centro dell'orbita?

Periodo di Io: 1.77 giorni
periodo di Giove: 11.86 anni
raggio dell'orbita di Giove: $7.78 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$.

Risposte

Problema 1. (Caduta di un sasso dalla Torre Pendente):

L'idea del problema è di supporre che sul sasso che cade agisca, oltre al campo gravitazionale della Terra, anche quello del Sole; ma che invece non agisca la forza apparente dovuta al moto orbitale (accelerato) della Terra.

Allora la risposta è facile: il campo gravitazionale della Terra è diretto in verticale e vale 9.8 N/kg. Quello del Sole vale $6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N/kg}$ e cambia direzione nel corso del giorno, ma alla mattina e alla sera è orizzontale. Perciò l'angolo del campo risultante rispetto alla verticale è $\alpha \simeq 6 \cdot 10^{-3}/9.8 \simeq 6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{rad}$.

La traiettoria di caduta sarebbe ancora rettilinea, ma formerebbe l'angolo α con la verticale, e il punto di caduta si sposterebbe quindi di $52 \times 6 \cdot 10^{-4} = 3.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m} = 3.2\,\mathrm{cm}$: verso est la mattina, verso ovest la sera. Uno spostamento facilmente osservabile.

Problema 2. (Il problema del palloncino):

a) Nell'atmosfera la variazione di pressione con l'altezza è $\Delta p = \varrho g \Delta z$ (asse z orientato verso il basso). Per ϱ possiamo assumere $1.3\,\mathrm{kg/m^3}$, e con $\Delta z = 20\,\mathrm{cm}$ otteniamo $\Delta p = 2.5\,\mathrm{Pa} \simeq 2.5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{atm}$.

b) Il calcolo è lo stesso di sopra, solo che al posto di g dovremo mettere il campo gravitazionale apparente, pari in modulo all'accelerazione del treno. Se lo scompartimento è largo 2 metri, avremo $\Delta p = 5.1\,\mathrm{Pa}$.

Problema 3. (Il bambino e il pendolo):

La prima risposta è banale: per il PR non cambia niente rispetto al treno fermo. Rsolviamo ora la seconda parte del problema, prima nel modo tradizionale, poi usando il PE.

a) Soluzione tradizionale: Oltre alla forza di gravità agisce sul pendolo una forza apparente $-m\vec{a}$, orizzontale e diretta nel verso in cui il treno avanza. Il pendolo si dispone secondo la risultante, che forma con la verticale l'angolo $\mathrm{arctg}(a/g) = 5.8°$.

Quanto al periodo, basta sostituire nella solita formula, al posto di g, $\sqrt{g^2+a^2}$, e si trova

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{g^2}{g^2+a^2}\right)^{1/4} = 0.9974.$$

Il periodo durante la frenata diminuisce dunque a 0.9974 s.

Problema 4. (Satelliti di Giove):

Stiamo supponendo che la forza che lega Io a Giove sia del tipo $\vec{F} = -k\,\vec{r}$: determiniamo k. Sarà $k\,r = m\,\omega^2 r$, quindi $k = m\,\omega^2$.

Nelle condizioni reali, la forza di attrazione del Sole è esattamente compensata dalla forza apparente, che ha modulo $m\,\Omega^2 R$, dove ho indicato con Ω la velocità angolare di Giove, con R il raggio della sua orbita.

Nell'ipotesi del problema resterebbe invece un eccesso di attrazione solare

$$\delta F = \varepsilon\, m\, \Omega^2 R,$$

con $\varepsilon = 0.001$. Questa forza sposterebbe il centro dell'orbita di Io di un tratto

$$\frac{\delta F}{k} = \varepsilon \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 R = 0.13\,\mathrm{km}$$

ben difficile da vedere anche con gli strumenti di oggi.

Nei *Principia* Newton affronta il problema e dà il risultato di un calcolo che non riporta. Secondo questo calcolo, l'effetto dovrebbe essere di 6 ordini di grandezza maggiore, e quindi assai evidente, anche con gli strumenti di allora. Dato che invece il moto dei satelliti di Giove appare circolare intorno al pianeta, ne conclude che Giove e satelliti vengono attratti dal Sole con forze esattamente proporzionali alle loro masse.

LEZIONE 6

Le verifiche moderne del PE

Oggi parlerò delle verifiche moderne, dove moderne significa da un secolo a questa parte; si va quindi da esperimenti che potrebbero essere definiti storici, fino a cose veramente recenti.

Sono stato un po' dubbioso se valesse la pena di spendere del tempo su argomenti che di solito vengono trascurati, e anche con buone ragioni. Si può dire: va bene, ci sono le verifiche, ci crediamo; non si deve sempre cercare come veramente sono stati fatti gli esperimenti... Però alla fine ho deciso che proprio perché di solito vengono trascurati, una volta valesse pure la pena di parlarne; anche perché parlare di questi esperimenti è un modo per rinforzare i discorsi che abbiamo fatto. Si vede come si applicano in situazioni reali, quando si fanno davvero delle misure e quindi non restano discorsi un po' astratti, come potrebbero sembrare quelli che abbiamo fatti fin qui.

Ricordate la nostra discussione: se non valesse il PE, se la forza di attrazione del Sole si sentisse sulla Terra, allora un sasso fatto cadere la mattina andrebbe da una parte e la sera andrebbe dall'altra. Ma sappiamo benissimo che non è così, quindi... Bene: ora vedremo che proprio idee del genere sono alla base degli esperimenti cui ho accennato.

Gli esperimenti di Eötvös

Il più famoso sperimentatore di questo secolo, del quale si parla su tutti i libri, anche se non si dice che cosa esattamente abbia fatto, è il barone Roland von Eötvös, ungherese. Egli condusse una serie di esperimenti sul lago Balaton, dal 1890 alla morte, nel 1919. Altri hanno poi continuato e affinato i suoi esperimenti.

Gli esperimenti di Eötvös sono basati su quest'idea: per un corpo che sta sulla superficie della Terra la forza che noi chiamiamo peso, e che provoca la caduta del corpo, in realtà è la risultante di due forze che hanno origini completamente diverse: una è la vera e propria forza gravitazionale, cioè la forza di attrazione della massa che costituisce la Terra; l'altra è la forza centrifuga derivante dal fatto che siamo in un rif. rotante.

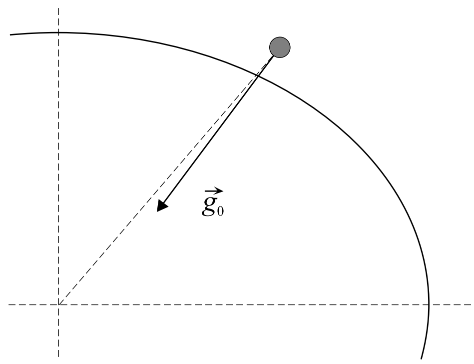


fig. 6–1

La vera forza di gravità $\vec{g}_0$ è diretta ... verso il centro della Terra? No. Non è diretta verso il centro, perché la Terra è schiacciata, non ha simmetria sferica (fig. 6–1). Comunque questo per noi è un fatto secondario, che ho sottolineato solo per evitare che si desse per scontata una cosa falsa.

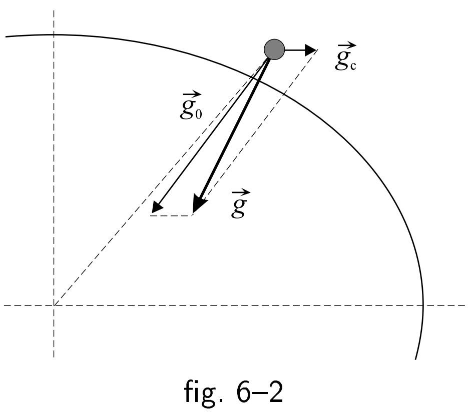


fig. 6–2

Poi c'è la forza centrifuga $\vec{g}_c$, che sposta ancora di più la risultante (fig. 6–2). Notate che la superficie della Terra, a parte le montagne e tutte le irregolarità, per ragioni di equilibrio meccanico dev'essere perpendicolare alla forza risultante. In particolare questo è sicuramente vero per un mare o per un lago. Infatti la verticale — la direzione del filo a piombo — è la direzione della forza risultante: non c'è modo di separare le due componenti.

Vediamo ora un po' di numeri: è ben noto che l'intensità del campo gravitazionale della Terra vale $g_0 = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$. (Mi fermo alla seconda cifra per prudenza, perché le successive cambiano da punto a punto.) La forza centrifuga si calcola facilmente: serve la velocità angolare della Terra e la distanza del punto in cui facciamo la misura dall'asse di rotazione. Quindi la forza centrifuga cambia parecchio a seconda del posto in cui siamo: al polo sarebbe nulla, all'equatore sarà massima.

Gli esperimenti sono stati fatti circa a 45° di latitudine, a metà strada fra equatore e polo. Messi i numeri, si trova $g_c = 2.4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m/s^2}$, ossia qualche per mille della forza di gravità.

Questa è la situazione: e adesso? A prima vista sembra che non ci si possa fare niente: un momento fa ho detto che non c'è modo di separarle, quando prendiamo un filo a piombo quella che vediamo è la risultante delle due.

Il punto è che se non vale il PE la forza di attrazione gravitazionale non è esattamente proporzionale alla massa del corpo, e allora fra un corpo e l'altro può esserci una differenza: quando si va a comporre i due vettori il risultato non viene sempre della stessa lunghezza, ma — molto più importante — non viene neppure con la stessa direzione.

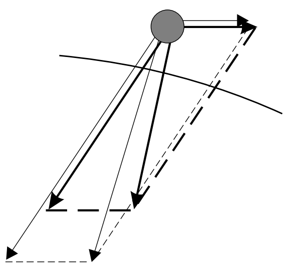


fig. 6–3

Prendiamo dunque due corpi di ugual massa, ma che per ipotesi sentano una forza gravitazionale diversa, proprio perché non vale il PE; allora la forza centrifuga è la stessa, ma l'attrazione gravitazionale no. Ne segue che la freccia segnata in orizzontale in fig. 6–3 ha la stessa lunghezza per i due corpi, mentre la freccia obliqua (verso il centro della Terra . . .) per uno è più lunga e per l'altro è più corta. È chiaro quindi che le due risultanti non saranno parallele.

Questo è come dire che se costruissi dei fili a piombo con corpi diversi non si disporrebbero tutti paralleli. Detta così è un'idea peregrina: faccio tanti fili a piombo, li appendo vicini e li guardo; se non stanno tutti paralleli vuol dire che non vale il PE. In linea di principio anche questo è un modo, ma è chiaro che è un modo poco sensibile, si potrebbero vedere solo effetti molto grossi; però è il punto di partenza. La vera idea è di usare una bilancia di torsione.

Ai due estremi del braccio orizzontale della bilancia di torsione si attaccano due corpi diversi (supponiamo per semplicità di uguale massa) uno ferro e uno piombo, oppure uno legno e uno marmo, quello che vi pare. Il filo della bilancia di torsione (fig. 6–4) si disporrà secondo la risultante delle forze che agiscono sui due corpi: una direzione intermedia fra le due.

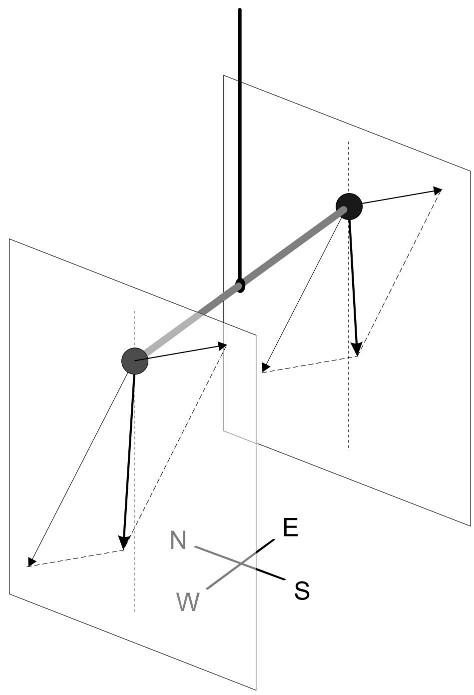


fig. 6–4

Però le forze che agiscono sul corpo A e sul corpo B non sono parallele al filo: quindi hanno momento non nullo rispetto al filo stesso, e si vede dalla figura che i due momenti hanno lo stesso segno. Ne segue che l'equipaggio della bilancia di torsione ruoterà in un certo verso.

Se mi fermo qua però non ho concluso niente: come faccio a sapere quale sarebbe stata la posizione di equilibrio se non ci fossero state quelle forze, visto che non le posso eliminare? L'idea è molto semplice: si prende tutto l'apparato e lo si ruota di 180°. In tal modo le forze si scambiano, e il verso dei momenti diventa opposto. L'apparato porta una scala graduata e tutto il necessario per vedere la posizione dell'equipaggio: perciò quando lo ruoto di 180° mi aspetto di vedere un (piccolo) spostamento. Questa è l'idea, ma fra dire e fare l'esperimento per bene ci corre: non a caso Eötvös ci ha lavorato un bel po' di anni. È facile una misura all'ingrosso, ma spingere la sensibilità agli estremi cui è arrivato Eötvös, è un altro discorso...

I risultati dell'esperimento di Eötvös sono noti: ripetuto con materiali diversi, in tante combinazioni, non si è mai visto niente. Ciò vuol dire semplicemente che se una differenza c'è, è al di sotto della sensibilità dello strumento, stimata 10^{-9}. Quindi in base a questi esperimenti possiamo dire che il PE vale entro 10^{-9}.

Riassumo: l'idea è di giocare sul fatto che l'attrazione gravitazionale e la forza centrifuga non varino in maniera proporzionale quando si passa da un corpo a un altro. Se variano in modo proporzionale, vale il PE e l'esperimento darà risultato nullo; ma se non variano in modo proporzionale allora ci sarà uno spostamento della verticale da un oggetto all'altro, e questo provocherà una rotazione.

Gli esperimenti di Dicke e di Braginskij

Molti anni dopo (anni '60-'70) sono stati fatti altri esperimenti, basati su un'idea simile, ma che contiene anche un elemento nuovo e più astuto. Gli esperimenti sono stati fatti in due fasi: prima da Dicke e coll. negli Stati Uniti, poi da Braginskij a Mosca. Sono sostanzialmente uguali come idea; differisce l'apparato sperimentale. Il secondo è stato fatto con l'intenzione di migliorare il primo, di renderlo più sensibile.

L'idea comune è che invece di confrontare l'attrazione terrestre con la forza centrifuga, come nell'esperimento di Eötvös, si confronta la forza di attrazione del Sole con la forza apparente dovuta all'accelerazione della Terra. Si tratta della stessa cosa di cui abbiamo già parlato: i sassi che dovrebbero cadere un po' a est la mattina e un po' a ovest la sera.

Il problema è: la forza di attrazione del Sole sarà esattamente compensata dal moto accelerato della Terra in orbita intorno al Sole, oppure no? Se viene compensata esattamente questa è una prova del PE; se non viene compensata esattamente me ne devo accorgere. Come me ne accorgo? Si usa ancora una bilancia di torsione, solo che ora la deviazione non è dovuta alla forza centrifuga. L'idea è che se la forza di attrazione del Sole agisce in maniera diversa su due corpi di materiali diversi, allora la bilancia deve ruotare.

A prima vista sembra che stiamo facendo lo stesso esperimento, e che ci sia uno svantaggio, perché mentre la forza centrifuga vale $2.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2}$, la forza del Sole è $6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$, come avevamo calcolato la volta passata: circa un fattore 4 più piccola. Allora che ci si guadagna a usare il Sole? Il grande vantaggio è questo: che la forza di attrazione del Sole cambia direzione nel tempo, perché il Sole ha un moto apparente. Noi sulla Terra vediamo il Sole a est la mattina, poi si alza verso sud e si riabbassa a ovest: quindi l'effetto dovuto alla forza di attrazione del Sole, se c'è, cambia periodicamente nel corso di un giorno.

Cambia direzione e cambia anche grandezza, perché all'alba e al tramonto il Sole è sull'orizzonte, quindi l'effetto è massimo; a mezzogiorno il Sole è più alto, in direzione obliqua, perciò agisce solo la componente orizzontale della forza. Ma la cosa più importante è che cambia direzione, con un periodo di 24 ore. Non c'è bisogno di girare l'apparato, come faceva Eötvös: l'apparato resta fermo, e ci pensa il moto del Sole a far girare la forza!

Notate: il dispositivo non ruota. Sì, d'accordo, ruota con la Terra; ma se ci mettiamo in un rif. solidale alla Terra dovremo solo aggiungere la forza centrifuga per tenerne conto. Però la forza centrifuga è costante: la Terra ruota con velocità angolare costante, l'apparato è fermo rispetto alla Terra, quindi le forze centrifughe che agiscono sulle due palle sono sempre le stesse. Anche l'attrazione terrestre non cambia, perché non muovo niente: se vedo muovere qualcosa non può che essere dovuto al fatto che s'è mosso il Sole.

D: È più grande l'accelerazione dovuta al Sole di quella data dalla Luna?

F: Sì, almeno due ordini di grandezza maggiore.

Riepilogando: se non vale il PE mi devo aspettare che la bilancia oscilli con un periodo di 24 ore. Siccome il fenomeno in esame ha un periodo noto, posso usare tutte le tecniche standard nella costruzione dell'apparato e nell'analisi dei dati. Per esempio costruirò la bilancia di torsione in modo che abbia un periodo proprio di 24 ore; cosa che non è precisamente facile, come potete immaginare, però è stata fatta.

In questo modo lavoro in risonanza, e l'oscillazione risulta molto più grande; se l'oscillatore ha un fattore di merito piuttosto alto si riesce a esaltare di qualche ordine di grandezza l'ampiezza dell'oscillazione. Si ottiene così un aumento notevole di sensibilità.

Ecco il risultato: da 10^{-9} che aveva trovato Eötvös, si arriva a 10^{-11} nel lavoro di Dicke e forse 10^{-12} in quello di Braginskij, che — per quanto ne so — è il meglio che si è fatto finora. Questi esperimenti dimostrano che la forza di attrazione gravitazionale è rigorosamente proporzionale alla massa del corpo; detto in altri termini, che massa inerziale e massa gravitazionale sono rigorosamente proporzionali. Gli esperimenti dimostrano questo per corpi di diversi materiali, entro il limite di 10^{-12}.

Non ci sono molte leggi fisiche di cui siamo sicuri con 12 cifre, quindi si può essere contenti. Intendo dire che la gran parte delle leggi fondamentali sono verificate con parecchi ordini di grandezza in meno, eppure si accettano tranquillamente; quindi il PE si può considerare fondato molto solidamente.

I laser sulla Luna

Un altro tipo di verifiche, completamente diverse, sono state fatte più di recente (a partire dagli anni '70). Il laser è stato utilizzato per misurare la distanza della Luna dalla Terra, ma l'idea di base dell'esperimento è sempre la solita: se la forza di attrazione del Sole sulla Terra e sulla Luna non fosse proporzionale alle loro masse, l'orbita della Luna ne verrebbe perturbata. Non nel modo semplificato che abbiamo visto l'altra volta per i satelliti di Giove, perché noi abbiamo fatto il conto supponendo che la forza che tiene in orbita il satellite fosse elastica; però la perturbazione ci sarebbe comunque ed è calcolabile. Basta quindi studiare il moto della Luna e vedere se la perturbazione c'è o no.

Dato che bisognerà cercare effetti di 10^{-11} o meno, dovremo misurare la distanza Terra–Luna con grandissima precisione, e con il laser si riesce. Si è potuto usare un laser dal momento in cui sono stati messi sulla Luna i famosi riflettori: c'è voluto prima un omino che è andato sulla Luna. Quei riflettori sono così fatti che se si manda un fascio laser sulla Luna, lo rimandano indietro nella stessa direzione da cui è venuto (non sono quindi semplici specchi!). Tutto quello che c'è da fare è dunque misurare la distanza, in base al tempo che impiega un impulso laser per andare e tornare. Naturalmente per misurare la distanza in questo modo, bisogna credere che la velocità di propagazione sia la solita c, altrimenti non si arriva a niente.

L'incertezza di queste misure è dell'ordine della decina di centimetri. La distanza Terra–Luna è 384 000 km in media, e 10 cm/384 000 km è dell'ordine di 10^{-10}.

D: come fanno a sapere di preciso dove hanno messo i riflettori?

F: Non importa, perché il fascio laser quando arriva sulla Luna è bello largo. È vero che i laser sono ben collimati, ma facciamo i conti! Ve lo suggerisco come problema: utilizzando la migliore tecnica di cui potete disporre, quanto sarebbe grande la macchia di luce prodotta da un laser sulla Luna?

È chiaro che se risultasse, poniamo, un metro sarebbe un guaio: come si potrebbe puntare il laser in modo da colpire il riflettore? Ma per fortuna la macchia è bella grossa, e non c'è problema.

Tornando alla misura, per fare questo esperimento ci sono diverse altre difficoltà. La fondamentale è che il moto della Luna è complicato; nessuno creda che sia una bella ellisse kepleriana. Perché? Ecco una serie di ragioni:

La forza di marea che abbiamo già nominata:

La famosa compensazione per cui la forza di attrazione del Sole sulla Luna è cancellata dalla forza apparente, è vera solo se il campo gravitazionale del Sole là dove si trova la Terra e quello dove si trova la Luna sono uguali. Il che non è, perché la Luna sta in un altro posto, e per di più la sua posizione cambia nel tempo; quindi in certi momenti il campo gravitazionale sulla Luna è più intenso e in altri momenti è meno intenso; poi ha una direzione diversa a tempi diversi. Dunque la cancellazione esatta non c'è, e questa "non cancellazione esatta" è quella che si chiama *forza di marea*: ne riparleremo.

A conti fatti, l'effetto della forza di marea sul moto della Luna è importante. Però quelli che si occupano di meccanica celeste conoscono il problema da moltissimo tempo e sanno benissimo come tenerne conto; quindi anche se il moto non è puramente kepleriano, si sa esattamente quale dovrà essere tenendo conto delle forze di marea.

Non sfericità della Terra:

Succede la stessa cosa che capita per un grave alla superficie terrestre: non vi potete aspettare che la forza di attrazione della Terra sulla Luna punti sempre verso il centro della Terra. Per di più, mentre la Luna gira attorno alla Terra direzione e grandezza di questa forza cambiano in un modo che non è quello dato dalla semplice legge di Newton: $1/r^2$.

Però anche questo si sa benissimo: si sa com'è fatta la Terra, si sa come va modificato il suo campo gravitazionale, quindi se ne sa tener conto. È solo un lavoro in più per chi deve confrontare le misure con la teoria, però è perfettamente fattibile (in pratica, è solo una maggior complicazione in un programma di computer. . .).

Attrazione degli altri pianeti:

A prima vista può sembrare incredibile, ma la Luna sente anche la forza di attrazione degli altri pianeti; principalmente di Venere. Principalmente di Venere perché, sebbene non sia il pianeta di più grande massa, è quello che passa più vicino. L'effetto è piccolo, ma quando si fanno quelle misure e si confrontano coi calcoli, bisogna tener conto anche della forza di attrazione degli altri pianeti.

Fatto tutto questo, tenuto conto di tutte le complicazioni, il risultato è che tutto torna entro 10^{-11}. Quindi non esattamente come nell'esperimento di Braginskij, ma almeno come in quello di Dicke.

Ora una domanda: perché è stato fatto quest'esperimento? Tutto sommato non è venuto meglio degli altri già fatti, quindi se ne poteva fare a meno. . . Si potrebbe pensare che in fase di progetto forse ci si aspettava un risultato migliore, ma non c'è solo questo: è che si tratta di un esperimento diverso. Il punto è che gli oggetti con cui sono stati fatti gli esperimenti di Eötvös, di Dicke e di Braginskij sono piccoli, di dimensioni umane, massa di qualche chilo. Inoltre (e questa è la cosa importante) sono corpi solidi, tenuti insieme da forze di attrazione di tipo elettrico tra gli atomi e le molecole che li costituiscono.

Terra e Luna sono oggetti del tutto differenti: in primo luogo perché hanno masse molto più grandi, ma soprattutto perché sono tenute insieme da una forza totalmente diversa, che è la gravità. Il punto importante è di far vedere che qualunque sia la struttura dell'oggetto e qualunque sia il tipo di forze che determinano la costituzione dell'oggetto (e quindi anche la sua massa: di questo riparleremo), che si tratti di un oggetto a scala umana o di un pianeta, che le forze interne dominanti siano di tipo elettrico o siano gravitazionali, il PE vale ugualmente.

Avrebbe potuto andare diversamente: avrebbe potuto funzionare con oggetti di certe dimensioni e con un certo tipo di forza, e con altri no. Ma a questo punto sulla validità del PE possiamo stare tranquilli, non avere più dubbi; almeno finché qualche nuovo esperimento non cambi le carte in tavola.

La "quinta forza"

Ricorderete che un po' di anni fa si è discusso se non ci potevano essere deviazioni dalla legge di gravitazione di Newton: una dipendenza della forza di gravità dalla composizione chimica o dalla costituzione dei corpi, e anche una diversa dipendenza dalla distanza. È la famosa questione della quinta forza.

La cosa è nata così: qualcuno ha riesaminato i risultati di tutti gli esperimenti di Eötvös e ha creduto di vedere che in realtà le deviazioni (che ci sono sempre, perché nessun esperimento dà risultati perfettamente in accordo con la teoria) non fossero accidentali. Vi ricordo che Eötvös aveva usato diversi materiali: ora sembrava che le deviazioni potessero avere una certa regolarità, una correlazione con la composizione chimica.

Poi è stato sollevato un altro problema, relativo alla scala di distanze. Tutti gli esperimenti sulla forza di gravità hanno questa caratteristica: o sono fatti in laboratorio, quindi a distanze dell'ordine del metro, o sono fatti su pianeti, su satelliti, quindi a distanze a dir poco di migliaia di chilometri. C'è un salto di vari ordini di grandezza: o distanze piccole, o distanze grandi; ma nella scala delle distanze c'è un buco. Potrebbe darsi che un esperimento a distanza poniamo di un chilometro trovi una forza di gravità con andamento un po' differente?

Così sono stati pensati ed eseguiti esperimenti a questo scopo. A quel tempo, forse 10 anni fa, c'è stato parecchio rumore, molta eccitazione che però dopo si è spenta. Il che vuol dire che alla fine gli esperimenti non hanno portato a niente di conclusivo.

Oggi possiamo dire tranquillamente: è stato bene pensarci, farsi venire tutti quei dubbi, anche fare gli esperimenti; ma la conclusione è stata che le cose continuano ad andare come pensavamo che andassero, va tutto liscio. Per questa ragione avrei potuto anche non parlarne affatto. Mi sembra interessante però ricordarvi che nella ricerca scientifica accadono anche queste cose. Passati gli anni si possono pure dimenticare: è stata fatta una congettura, non ha funzionato, basta; dalla scienza "consolidata" questa ricerca sparisce, perché non ha prodotto risultati.

Dunque il PE va bene; la legge di gravità funziona come ci ha insegnato Newton. Ma forse voi state pensando da un po': e la relatività quando arriva? Sembra che di tutto parliamo tranne che di relatività... In realtà stiamo parlando di relatività, ma in una maniera che non è secondo le abitudini consuete; sembra che tutto questo con la relatività non c'entri niente, che stiamo divagando. Va bene: allora passiamo a cose più vicine alla relatività...

PE debole e PE forte

Si tratta di una distinzione che faccio più per utilità espositiva, che non per necessità; vedremo infatti che in realtà questa distinzione non è neanche condivisa da tutti. Inoltre non consiglierei una presentazione didattica basata su PE debole e PE forte.

Si chiama talvolta "debole" il PE come si è usato fino ad ora: *tutti i corpi si muovono allo stesso modo in un campo gravitazionale.* Questo è uno dei modi per enunciarlo, e detto così non è che l'esatta generalizzazione, dovuta a Newton, della scoperta di Galileo. Questi dice che tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione; più in generale, dalle leggi di Newton segue che il moto di un corpo in un campo gravitazionale non dipende dalla natura del corpo, dalla massa, dalla composizione. In particolare, una conseguenza del PE debole è la cancellazione della gravità in un riferimento in caduta libera.

Ora finalmente si comincia a parlare di relatività. Einstein estende il PE, dal moto a tutti fenomeni fisici. Il PE come l'abbiamo appena enunciato dice solo che *agli effetti del moto* di un corpo la sua costituzione, la massa, non contano; e come conseguenza, la forza apparente in un riferimento accelerato è equivalente alla forza di gravità. Ecco perché si chiama PE: perché afferma l'equivalenza meccanica tra forza di gravità e forze apparenti.

Quello che Einstein dice è: l'equivalenza non sussiste solo agli effetti meccanici, un rif. in caduta libera è equivalente *a tutti gli effetti* a un RI nello spazio vuoto. Quando dico "a tutti gli effetti" intendo dire a tutti gli effetti fisici. Avrei potuto usare una formulazione un po' diversa, ma equivalente: le leggi fisiche in un rif. in caduta libera sono identiche a quelle in un RI che si muova nello spazio vuoto. Per *qualsiasi fenomeno fisico* un rif. in caduta libera è indistinguibile da un RI.

Questa è la formulazione più generale del PE, ed è quello che di solito si chiama PE forte. Il "forte" sta nel fatto che ora non si parla più soltanto del moto, ma di qualunque fenomeno fisico: se voi siete in un rif. in caduta libera, facendo esperimenti non vi potete accorgere che siete in caduta libera in un campo gravitazionale; non potete distinguerlo dal moto in uno spazio vuoto dove non c'è niente, non ci sono campi gravitazionali e voi state viaggiando per inerzia con velocità costante. In queste due situazioni trovate gli stessi risultati: vale ancora il principio del taccuino.

Viceversa: la forza di gravità equivale *a tutti gli effetti* alla forza apparente in un riferimento accelerato. È chiaro che le due cose sono strettamente collegate: se siamo in un riferimento accelerato noi sentiamo una forza apparente, che si ripercuote sugli esperimenti che facciamo (non solo su quelli di meccanica). Bene: diciamo che la forza di gravità ha lo stesso effetto, è indistinguibile *per qualunque fenomeno fisico* dalle forze apparenti che si manifestano in un rif. accelerato.

Ma un momento: Einstein dice questo, ma perché lo dice? Potrei anche rispondere che la cosa importante non è tanto sapere com'è venuta questa idea, quanto vedere se è giusta: se ha conseguenze verificate sperimentalmente oppure no. Però può anche essere interessante sapere che cosa ha portato Einstein a fare quest'affermazione. Certo non gli esperimenti di cui abbiamo parlato, perché quegli esperimenti riguardavano solo il moto e le forze apparenti, e perciò restavano nell'ambito della meccanica: non consentivano la generalizzazione espressa dal PE forte.

L'esigenza di Einstein è scritta esplicitamente in un lavoro del 1911: a lui dava fastidio che i RI (nel senso newtoniano del termine) avessero un ruolo privilegiato. Le leggi della meccanica sono giuste solo in un RI, mentre per poterle applicare in un rif. accelerato bisogna aggiungere le forze apparenti. Stando così le cose, i rif. accelerati sono diversi dai RI. Questo ad Einstein non piace, e scrive: vorrei generalizzare l'equivalenza dei RI, cioè il PR, trasportandola anche ai rif. accelerati.

Ora che cos'ha di strano l'accelerazione? Sappiamo che in un rif. accelerato qualcosa cambia, però Einstein osserva: in un rif. accelerato basta introdurre una forza apparente, che almeno nell'ambito meccanico è come avere un campo gravitazionale. Da qui l'idea: potrò applicare tutte le leggi fisiche anche ai riferimenti accelerati, a patto di considerare le forze apparenti come forze gravitazionali. O inversamente, a patto di vedere la gravità come la manifestazione del fatto che non siamo un RI. Da questo punto di vista sarà inerziale un rif. in cui la gravità non si vede, ossia un rif. *in caduta libera.*

Se questo sia vero, se sia in accordo con i fatti osservati è un problema che rimane aperto, perché abbiamo fatto un'ipotesi. Chiamiamolo principio, congettura, postulato; chiamiamolo come volete, ma fino a questo punto non c'è nessuna base sperimentale.

Una piccola parentesi. Spero che a qualcuno sia venuto in mente un dubbio. Quando affermo che in un rif. in caduta libera tutto va come in un RI nello spazio vuoto, non mi sto dimenticando delle forze di marea? Ho detto poco fa che se guardo la Luna da un rif. che si muove con la Terra (e che quindi è in caduta libera nel campo del Sole) non la vedo muoversi proprio come se l'attrazione del Sole non ci fosse, perché le forze non si compensano esattamente. Quindi guardando il moto della Luna mi posso accorgere che c'è il Sole. Allora come la mettiamo?

La soluzione è che la cancellazione si può fare con buona precisione se ci si limita a una regione di spazio abbastanza piccola, in cui il campo gravitazionale non cambia apprezzabilmente; comunque anche di questo riparleremo. Per ora metto solo un'avvertenza accanto alla formulazione del PE: stiamo dimenticando le forze di marea, cosa che si esprime dicendo che l'equivalenza vale solo "in piccolo." Il termine tecnico è: l'equivalenza ha valore *locale.*

Un tipico esempio è l'ascensore: nell'ascensore che cade la forza di gravità sparisce. A rigore, non è proprio vero nemmeno nell'ascensore, perché sul pavimento dell'ascensore, che sta più vicino alla Terra, la forza di gravità è un po' più grande di quella al centro; invece sul soffitto la forza di gravità è un po' più piccola. Ne segue che quando l'ascensore cade la forza di gravità non si può cancellare esattamente dappertutto: resta un piccolo residuo. Però fate i conti, calcolate questo residuo, e poi trovatemi l'esperimento che sia in grado di vederlo.

Dato che l'ascensore è piccolo, questa non esatta cancellazione è trascurabile. Meglio: per quanto precisi siano gli esperimenti che posso fare, basta prendere una regione spazio-temporale abbastanza piccola e la forza di gravità si cancella entro i limiti sperimentali.

Quindi "locale" qui significa "al limite": comunque fissata una precisione sperimentale, si può trovare una regione di spazio-tempo così piccola che entro quella regione non sarà possibile mettere in evidenza nessun effetto di marea.

Prima di arrivare al discorso più importante, premetto un'osservazione. L'ordine di esposizione che sto seguendo è sicuramente inconsueto: non è l'ordine tradizionale. Parlando di relatività, abbiamo cominciato con discorsi sul PR, e fin qui niente di strano; ma ora dove vi sto portando? Vi sarete resi conto che stiamo passando alla RG! Questo è voluto, perché intendo mostrare che la RG non è quella cosa astrusa, da tenere lontana, o magari da lasciar perdere del tutto, perché inaccessibile. Come vedete, stiamo arrivando alla RG con una transizione naturale dalla meccanica newtoniana, dallo studio dei moti nei rif. accelerati: argomenti tradizionali nell'insegnamento della fisica.

Più avanti torneremo a parlare di cose che riconoscerete come RR; del resto abbiamo già parlato d'invarianza della velocità della luce. Ho scelto di alternare gli argomenti proprio per farvi vedere che non c'è una differenza qualitativa di difficoltà; ma c'è anche un altro motivo, ed è che le cose sono intimamente legate: *c'è una sola relatività.* Ma questo lo vedremo meglio nel seguito.

Il nuovo paradigma

Questo titolo è un evidente richiamo alle ormai antiche tesi di Kuhn a proposito dei paradigmi della ricerca scientifica. Senza affrontare una vera discussione epistemologica, voglio solo sottolineare che per seguire Einstein nel suo ragionamento bisogna imparare a fare una certa ginnastica mentale: vedere cose vecchie in modo nuovo. Il che non implica ancora necessariamente di vedere cose nuove; ci sono anche queste, ma prima bisogna imparare a rivedere le cose che ci sono familiari, interpretandole in un modo diverso. Questo appunto significa un *cambiamento di paradigma.*

Intanto un'osservazione: il passo che Einstein fa a proposito del PE è perfettamente parallelo a quello che ha fatto col PR. Abbiamo visto che il PR esiste già nella meccanica newtoniana: l'equivalenza agli effetti del moto, agli effetti delle leggi della meccanica, di tutti i rif. in moto traslatorio uniforme (TRU) si conosceva già. L'idea di Einstein è che quest'equivalenza non valga solo agli effetti della meccanica, ma agli effetti fisici in generale: che due rif. in moto TRU uno rispetto all'altro sono completamente equivalenti a tutti gli effetti fisici; che nessun esperimento permette di riconoscere ecc.

Bene, col PE accade la stessa cosa. Di nuovo il punto di partenza era già noto: che in un rif. in caduta libera la gravità si cancelli, lo aveva già capito Newton. Ricordate: lo dice a proposito del moto dei satelliti di Giove. La novità introdotta da Einstein è che la gravità non si cancella solo agli effetti del moto — quindi agli effetti meccanici — ma per qualunque fenomeno fisico. Un rif. in caduta libera è *completamente* equivalente a un RI. Come vedete siamo proprio sullo stesso terreno; nel caso del PR sono completamente equivalenti i rif. in moto TRU uno rispetto all'altro; nel caso del PE un rif. in caduta libera è completamente equivalente a un RI.

Il procedimento è lo stesso: si afferma sempre l'equivalenza fisica di due rif. agli effetti di qualunque fenomeno. La differenza è che nel primo caso confrontiamo moti relativi uniformi; nel secondo confrontiamo il vecchio RI nello spazio vuoto senza niente intorno, senza masse, campi gravitazionali ecc., col rif. in caduta libera.

Einstein dice: per un rif. in caduta libera dimenticate la gravità, dimenticate che sta cadendo, e vedrete che è equivalente all'altro rif., quello inerziale di Newton. Ecco dove comincia il cambiamento di paradigma: il PE di Einstein porta a ridefinire che cos'è un RI. I nuovi RI sono quelli dove valgono le leggi della fisica che noi conosciamo, senza bisogno di aggiungere forze apparenti o altri effetti "strani." Quali sono questi rif.? Sono i rif. in caduta libera. Ciò che conta è che sul rif., sul laboratorio (che, ricordate, è un oggetto materiale, quindi una stanza, un'astronave, quello che vi pare) non agisca altro che la forza di gravità di qualcosa. Se invece è presente la resistenza dell'aria, o la pressione di radiazione o altro, allora l'equivalenza non funziona più.

Un caso particolare di RI è un riferimento in moto TRU lontano da sorgenti di campo gravitazionale. Spedite la vostra astronave lontano dal Sole, dalla Terra, dai pianeti, il più possibile lontano da tutte le stelle. Mettetevi a un paio di anni luce, tra qui e α Centauri... Spegnete i motori: quello è un RI. Fin qui erano d'accordo tutti anche prima, però secondo Einstein questo è solo un caso particolare. Dal suo punto di vista l'astronave rimane un RI anche se si trova vicino al Sole; basta che abbia i motori spenti, questo sì è necessario. L'astronave starà in orbita, si muoverà non so come? Non importa: dentro l'astronave io non me ne accorgo.

Invece non sono inerziali, in un campo gravitazionale, i rif. fermi o comunque che non siano in caduta libera. Se per es. la mia astronave sta nelle vicinanze del Sole e invece di lasciarla girare in orbita la voglio fermare, posso farlo: oriento l'astronave in modo che gli ugelli del motore guardino verso il Sole, regolo i razzi così che la loro spinta compensi l'attrazione solare, e l'astronave se ne sta ferma sospesa... Però ho i motori accesi, e allora l'astronave non è un RI. Oppure: l'astronave viaggia dentro un'atmosfera che la frena: allora non ho più un RI.

Ci sono domande?

D: Allora noi nel rif. della Terra non saremmo in un RI.

F: Giustissimo: da questo punto di vista, con questa ridefinizione di RI, noi in questo momento *non siamo* in un RI. E non perché la terra gira!

Mi sono fermato a chiedere se c'erano domande, perché chi parla sente l'atmosfera. Mi sembra di sentirvi pensare: "Ma che ci sta dicendo questo? Ci obbliga a buttare all'aria tutto quello che abbiamo pensato fino adesso, quello che ci hanno insegnato, e che noi abbiamo insegnato. Ci chiede di pensare cose totalmente diverse: quelli che erano RI non lo sono più, e viceversa."

Non a caso ho richiamato prima il "cambiamento di paradigma." Ma badate bene: non sto dicendo che questo che ho appena asserito è vero e quello che sapevate prima è falso; non sto dicendo che Newton ha sbagliato tutto. Fin qui è solo questione di definizioni, di utilità di una definizione, di punto di vista.

Insomma: che cos'è un RI? Nella meccanica newtoniana viene data una certa definizione, e c'è un certo vantaggio a definirlo in quel modo. Il punto di vista di Einstein è che se vogliamo usare conseguentemente il PE, se vogliamo affermare che la forza di gravità non è distinguibile dalla forza apparente in un rif. accelerato, allora la cosa più semplice da fare è chiamare inerziale un rif. in caduta libera. Ci semplifica la vita, è più convincente e poi vedremo meglio che è anche qualcosa di più: probabilmente è più profondo.

D: Un laboratorio in caduta libera mentre ruota...

F: No, non deve ruotare: se ruota compare la forza centrifuga, la forza di Coriolis... Avrei dovuto dirlo chiaramente: caduta libera significa anche che non deve ruotare.

D: Ma la forza centrifuga in un rif. rotante non equivale a una forza gravitazionale? Sto pensando a *2001 odissea nello spazio*, dove c'è un'astronave che ruota per creare una gravità artificiale.

F: Dipende sempre dal punto di vista in cui uno si mette. Se ho tutto il laboratorio a disposizione, compreso l'asse di rotazione, è chiaro che mi posso accorgere che la forza centrifuga cambia intensità con la distanza dall'asse, cambia direzione da un punto all'altro; quindi mi accorgo che c'è qualcosa di strano. Ma se penso all'astronave fatta ad anello, un anello di sezione piccola rispetto al raggio, allora l'asse di rotazione non è accessibile; è accessibile solo un piccolo spessore nel quale la forza centrifuga è praticamente costante. Se per di più il mio laboratorio è solo una stanzetta in questo anello, la forza centrifuga è costante anche come vettore. Quindi localmente è come se ci fosse un campo gravitazionale.

Però se esco dal mio piccolo laboratorio, se mi metto a girare in tondo, lungo tutto l'anello, mi accorgo bene che le cose sono più complicate! Mi pare di ricordare che in *Odissea nello spazio* si veda un astronauta che fa il footing. L'astronauta corre coi piedi "piantati per terra" grazie alla sua brava forza di gravità; però si dovrebbe accorgere di una cosa: che a seconda del verso in cui corre, il suo peso cambia. Non vi dico perché: pensateci.

Ecco che avremmo un fenomeno strano: il peso che dipende dalla velocità. Come vedete, se ho abbastanza spazio a disposizione, mi posso accorgere che non sono in un RI. È per questo che bisogna sempre dire "in piccolo": con poco spazio e poco tempo a disposizione.

Dunque decidiamo di chiamare RI quelli in caduta libera. Ripeto: non siamo obbligati a farlo, ma questa è la linea di ragionamento di Einstein. Uno può anche dire "non mi piace"; risponderei va bene, ma sta' a vedere un po' dove ci porta.

Questo cambiamento di paradigma in partenza non sembra importante: solo un modo diverso di vedere cose già note, quindi non cambia niente. Però il modo diverso può aprire la strada a scoperte: possiamo essere portati a vedere cose di cui per la via abituale non ci si accorgeva. Questo naturalmente è proprio il caso dell'idea di Einstein. Se voglio essere coerente, in questo nuovo paradigma la forza di gravità diventa una forza apparente: quando noi diciamo che c'è la forza di gravità, è solo perché non ci siamo messi nel rif. giusto, nel rif. in caduta libera. Nel rif. in caduta libera la gravità sparisce.

Vediamo due esempi, che vi mostreranno l'analogia completa fra due situazioni. La prima è quella che ci è familiare. Mi metto su una giostra che gira, e mi accorgo che c'è la forza centrifuga. Materialmente me ne accorgo perché se ho in mano un oggetto, quello tende a scapparmi verso l'esterno. Per impedirgli di scappare lo devo trattenere, cioè gli devo applicare una forza verso l'interno. Poiché vedo che debbo applicare una forza per tenerlo fermo, sono costretto a dire che ci dev'essere un'altra forza, che va compensata. Voi sapete benissimo che se mi metto nel RI "vecchia maniera" non dico così. Dico invece: si capisce che ci vuole una forza; quell'oggetto che tengo in mano descrive un moto circolare uniforme, che è accelerato e quindi richiede una forza; la mia mano applica appunto la forza che ci vuole. La forza centrifuga c'è nel rif. rotante, non c'è nel RI.

Secondo esempio: mi metto in un rif. solidale alla Terra. In questo rif. scopro che se voglio impedire alle cose di cadere, le devo trattenere: devo applicare una forza verso l'alto. Ne deduco che c'è una forza (apparente) verso il basso. Ho scritto apparente, perché è proprio la stessa cosa della forza centrifuga: è una forza in più che non so da dove viene. E come nell'altro caso, la potrei far sparire: basterebbe che mi mettessi nel rif. in caduta libera.

Dunque in entrambi i casi la risposta è una sola: la forza nasce perché non sto in un RI. Con la nuova definizione di RI le due situazioni sono perfettamente parallele: la giostra non è un RI, ma anche quello in cui stiamo in questo momento non è un RI. Tutti noi stiamo fermi perché il pavimento ci sostiene: se non ci fosse, sprofonderemmo.

Problemi

1. Nell'esperimento di Eötvös, la bilancia di torsione ha il periodo di un'ora e il braccio orizzontale è lungo un metro. Di quanto ruoterebbe l'equipaggio se la forza di gravità su due corpi di ugual massa differisse per 10^{-9}?

2. Stimare il diametro di un fascio laser sulla Luna, supponendo di usare quanto di meglio permette la tecnica per produrre il fascio.

3. In una stazione spaziale (del genere di quella in *2001 odissea nello spazio*) si simula la gravità facendo ruotare la stazione, che ha la forma di una ciambella. In tal modo una persona può stare "in piedi," poggiando i medesimi sulla parete della stazione volta all'esterno. Un astronauta si esercita a fare del footing: mostrare che egli si sentirà più pesante o meno pesante che se stesse fermo, a seconda del verso in cui corre.

4. Servirsi del PE (ascensore di Einstein) per spiegare la deflessione gravitazionale della luce.

5. Un'astronave nello spazio vuoto ha i motori accesi, che producono un'accelerazione $a = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Un trasmettitore posto nella coda lancia onde e.m. verso prua. Calcolare la variazione relativa di frequenza nelle onde ricevute a prua, se l'astronave è lunga 30 m.

Risposte

Problema 1. (L'esperimento di Eötvös):

Sia m la massa comune dei due corpi: la forza centrifuga $\vec{F}_\mathrm{c}$ è la stessa su entrambi, e vale in modulo mg_c, mentre le forze gravitazionali sono per ipotesi diverse. Scriviamole

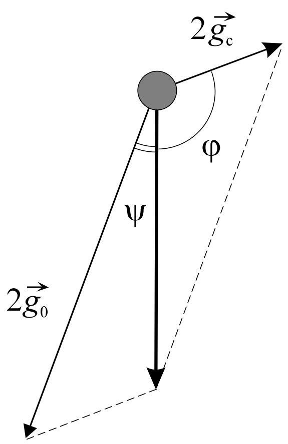


fig. 6–5

$$\vec{F}_1 = m\,\vec{g}_0\,(1+\varepsilon) \qquad \vec{F}_2 = m\,\vec{g}_0\,(1-\varepsilon) \tag{6–1}$$

rispettivamente; secondo i dati del problema, $2\,\varepsilon = 10^{-9}$.

La sospensione del pendolo si dispone secondo la "verticale," che ha la direzione della risultante di tutte queste forze: $2\,m\,\vec{g}_0 + 2\,m\,\vec{g}_\mathrm{c}$. La fig. 6–5 mostra la situazione, e tra gli angoli indicati si ha la relazione:

$$g_0 \sin\psi = g_\mathrm{c} \sin\varphi \tag{6–2}$$

dove φ è il supplemento della latitudine del luogo: $\varphi = 135°$ se la latitudine è 45°.

Occorre ora calcolare i momenti delle forze rispetto al filo verticale. Le due forze centrifughe sono uguali, e i loro momenti si cancellano; il momento della forza $\vec{F}_1$ è $lF_1 \sin\psi$, se l è la semilunghezza del braccio orizzontale: $l = 0.5\,\mathrm{m}$. Analogamente per il momento di $\vec{F}_2$, a parte il segno opposto. Usando la (6–1) e la (6–2) si ha per il momento risultante:

$$M = 2\,\varepsilon\, m\, g_\mathrm{c}\, l \sin\varphi.$$

Calcoliamo g_c dai dati della Terra:

$$g_\mathrm{c} = \omega^2 R \cos\varphi = \frac{4\pi^2 R}{T^2}\cos\varphi$$

dove R è il raggio della Terra, T il suo periodo di rotazione.

L'angolo di torsione del pendolo si ricava partendo dalle relazioni ben note:

$$T_\mathrm{p} = 2\pi\sqrt{I/k} \qquad M = k\vartheta$$

dove $I = 2\,m\,l^2$ è il momento d'inerzia del pendolo, ϑ l'angolo di torsione e T_p il periodo. Dunque

$$\vartheta = \frac{M}{k} = \frac{M\,T_\mathrm{p}^2}{8\pi^2 m\,l^2} = \varepsilon\left(\frac{T_\mathrm{p}}{T}\right)^2 \frac{R}{l}\,\sin\varphi\,\cos\varphi.$$

e sostituendo i dati si trova $\vartheta = 5.6\cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad} = 1.1''$.

Problema 2. (Laser sulla Luna):

La cosa migliore che si può fare è di usare un telescopio all'inverso; in tal modo il fascio uscente ha una collimazione limitata (in caso ideale) solo dalla diffrazione, che è dell'ordine λ/d (d diametro dello specchio del telescopio). Alla distanza D della Luna si formerà quindi una macchia di diametro $\lambda\,D/d$.

Ponendo $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$, $d = 2\,\mathrm{m}$, $D = 3.8\cdot 10^8\,\mathrm{m}$ si trova 95 metri.

Ma il punto essenziale è che questa è anche la risoluzione con cui si può vedere un dettaglio della superficie lunare, e quindi è anche la massima precisione possibile nel puntamento del laser. Non conosco l'esatta procedura che si segue, ma se per es. il riflettore fosse stato messo al centro di un piccolo cratere ben visibile da Terra, basterebbe puntare il laser al centro del cratere per centrare il riflettore.

Problema 3. (Footing in una stazione spaziale):

Possiamo risolvere il problema da due punti di vista: o lavorando in un RI, oppure nel rif. rotante della stazione.

A. Sia R il raggio della ciambella, ω la sua velocità angolare. Per simulare la gravità terrestre, si sarà scelta ω in modo che sia $\omega^2 R = g$.

Scelgo come verso positivo in direzione radiale quello verso l'esterno; in direzione tangenziale quello concorde con la roataione della stazione.

Se l'astronauta sta fermo rispetto alla stazione, esso si muove di moto circolare uniforme con velocità angolare ω rispetto a un RI, e la forza centripeta occorrente ($F = -m\,\omega^2 R = -mg$) è fornita dal "pavimento" su cui poggia (piedi in fuori e testa in dentro, rispetto all'asse della ciambella).

Se invece corre a velocità v rispetto al pavimento, la sua velocità nel RI è $v' = \omega R + v$, e la forza occorrente per tenerlo sulla stessa traiettoria è ora

$$F' = -\frac{m\,v'^2}{R} = -\frac{m\,(\omega R + v)^2}{R}. \tag{6–3}$$

Questa forza è prodotta dal pavimento e si ridistribuisce sulle parti del corpo come quando l'astronauta è fermo: ciò dà all'astronauta la sensazione di "peso." Dalla (6–3) si vede che $|F'| \gtrless |F|$ a seconda che l'astronauta corra nello stesso verso in cui la stazione ruota, o in verso opposto (supponendo che sia comunque $|v| < \omega R$).

B. Nel rif. (rotante) della stazione, sull'astronauta fermo agiscono due forze che si fanno equilibrio: la forza centrifuga $m\,\omega^2 R$ e la reazione vincolare F del pavimento. Dunque $F = -m\,\omega^2 R$, come sopra.

Se invece l'astronauta corre, su di lui agiscono:

a) la forza centrifuga, che vale ancora $m\,\omega^2 R$

b) la reazione del pavimento F'

c) la forza di Coriolis $F_c = 2m\,\omega\,v$.

Nota: Il segno di F_c è giusto con le convenzioni adottate: se $v > 0$ la forza è verso l'esterno, come si verifica partendo dell'espressione vettoriale $-2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}$.

La risultante di queste forze è la forza centripeta necessaria per il moto circolare dell'astronauta rispetto alla stazione, con velocità v:

$$-\frac{m\,v^2}{R} = m\,\omega^2 R + F' + 2m\,\omega\,v$$

da cui

$$F' = -\frac{m\,v^2}{R} - m\,\omega^2 R - 2m\,\omega\,v$$

che coincide con la (6–3).

Problema 4. (Deflessione della luce):

L'ascensore in caduta libera è un RI; perciò se nell'ascensore si monta un proiettore che manda un fascio di luce orizzontale, esso incontrerà la parete opposta alla stessa altezza.

Se sparo un proiettile nel rif. dell'ascensore, che è inerziale, esso si muove in linea retta, ma se lo guardo da terra vedo una traiettoria curva. Dico questo non perché aggiungo la gravità, ma solo per ragioni cinematiche: l'ascensore si muove verso il basso di moto accelerato e percorre spazi verticali proporzionali ai quadrati dei tempi, mentre il proiettile percorre spazi orizzontali proporzionali semplicemente ai tempi. Perciò la traiettoria del proiettile, vista da terra, è una parabola.

Notate che per ragionare come Einstein, nel nuovo paradigma, dobbiamo capovolgere il filo logico cui siamo abituati. In primo luogo, so come si muove il proiettile nella cabina, che è un RI; poi guardo come si muove la cabina rispetto al rif. terrestre, e compongo i due moti.

Per la luce la situazione è analoga: cambiano solo gli ordini di grandezza dei parametri che descrivono la traiettoria, causa l'elevata velocità della luce.

– Nel rif. (inerziale) dell'ascensore $x' = c\,t$, $y' = 0$.

– Moto dell'ascensore rispetto alla Terra: $x = 0$, $y = \frac{1}{2}\,gt^2$.

Componendo i due moti:

$$x = c\,t, \qquad y = \tfrac{1}{2}\,gt^2 = \frac{gx^2}{2\,c^2}.$$

Se $x = 10\,\mathrm{m}$, risulta $y \simeq 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$ e la deflessione angolare

$$\frac{dy}{dx} = \frac{gx}{c^2} \simeq 10^{-14}\,\mathrm{rad}.$$

Il problema sarebbe ora di verificare sperimentalmente questo effetto, ma con i numeri trovati risulta impossibile: occorrerà quindi trovare il modo per amplificarlo.

Problema 5. (Propagazione nell'astronave):

Durante il tempo di transito t del segnale il ricevitore si muove di uno spazio $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$. Facciamo un'ipotesi semplificatrice: s è molto minore della lunghezza h dell'astronave. Allora si può porre $t = h/c$. L'ipotesi fatta richiede $ah/c^2 \ll 1$, condizione ben verificata coi nostri dati.

La velocità del ricevitore quando viene raggiunto dalla radiazione sarà $v = ah/c$, in allontanamento dalla sorgente, e si vede che $v \ll c$. Possiamo quindi trascurare, nel calcolo dell'effetto Doppler, i termini di secondo ordine in v/c, e per la variazione relativa di frequenza abbiamo:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c} = -\frac{ah}{c^2} = -3 \cdot 10^{-15}.$$

Grazie al PE possiamo dire che lo stesso risultato si avrà in un esperimento fatto sulla Terra, mandando un'onda e.m. verso l'alto (esperimento di Pound–Rebka–Snider). Si ottiene così il redshift gravitazionale.

LEZIONE 7

La deflessione gravitazionale "in grande"

Col problema 4 della scorsa lezione abbiamo visto che la deflessione c'è, ma per misurarla dobbiamo usare "un laboratorio più grande." L'idea è di usare tutta la Terra come laboratorio, visto che l'entità della deflessione angolare è proporzionale alla distanza percorsa dalla luce.

Nasce però una difficoltà: non si può usare tranquillamente il PE perché esso vale in un rif. in caduta libera in cui la gravità si cancella. Ma è chiaro che se la luce percorre uno spazio delle dimensioni della Terra tale rif. non esiste: la gravità non si cancella perché il campo gravitazionale non è costante, né in grandezza né in direzione. Perciò per fare il calcolo occorrono conoscenze più approfondite, ossia la RG vera e propria.

Accontentiamoci di cercare soltanto l'ordine di grandezza. È chiaro che l'effetto è maggiore quando la distanza è minima, e diminuisce quando il raggio si allontana dalla superficie terrestre. Cerchiamo allora di cavarcela con un compromesso: poniamo che g sia costante per un tratto pari a $2R$ (diametro terrestre) e nulla fuori. Allora siamo nelle condizioni dell'ascensore, e troviamo:

$$\vartheta = \frac{2gR}{c^2} = \frac{2GM}{c^2 R} \simeq 10^{-9}\,\mathrm{rad}.$$

Come vedete, anche in questa situazione siamo molto al di sotto di ciò che gli strumenti attuali permettono di misurare. Se però invece della Terra usassimo il Sole, nel calcolo cambierebbero soltanto la massa e il raggio: otterremmo

$$\vartheta \simeq 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad} \simeq 0.8''$$

e questo è un angolo che con le tecniche astronomiche può essere misurato. Il calcolo esatto, fatto con la RG, porta all'espressione:

$$\vartheta = \frac{4GM}{c^2 R} \tag{7–1}$$

che differisce dalla nostra solo per un fattore 2: l'ordine di grandezza è quindi corretto.

A questo punto possiamo riprendere il discorso già fatto nella seconda lezione, e la relativa figura (fig. 7–1). Ho già raccontato la storia di queste misure e le difficoltà che si presentano. Ho anche accennato che negli ultimi anni si è aggiunta una nuova possibilità: quella di usare le quasar.

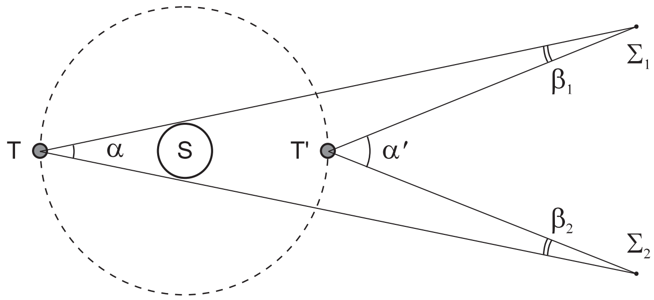


fig. 7–1

Le quasar sono radiosorgenti, con forte emissione a lunghezze d'onda molto più lunghe del visibile. Sono sorgenti piccole, non estese, praticamente puntiformi, (il nome indica appunto "quasi stellari"). È il caso di ricordare, anche se non ha importanza per i nostri scopi attuali, che le quasar appaiono piccole perché sono estremamente distanti (come è mostrato dal grande redshift, di cui parleremo più avanti). Debbono quindi essere anche estremamente intense, e il meccanismo di un'emissione così intensa ha sempre dato da discutere.

Le posizioni delle quasar possono essere misurate con precisione usando i radiotelescopi, o meglio i radiointerferometri a grande base, il che implica un'altissima risoluzione.

Il fatto di non lavorare nel visibile offre molteplici vantaggi:

1. Non occorre più aspettare un'eclisse di Sole, ma le misure possono essere fatte in qualunque giorno dell'anno, in qualunque ora del giorno o della notte, e in qualunque località.
2. Non abbiamo più bisogno del cielo sereno, poiché le nuvole non influenzano la propagazione delle onde e.m. nel campo radio.

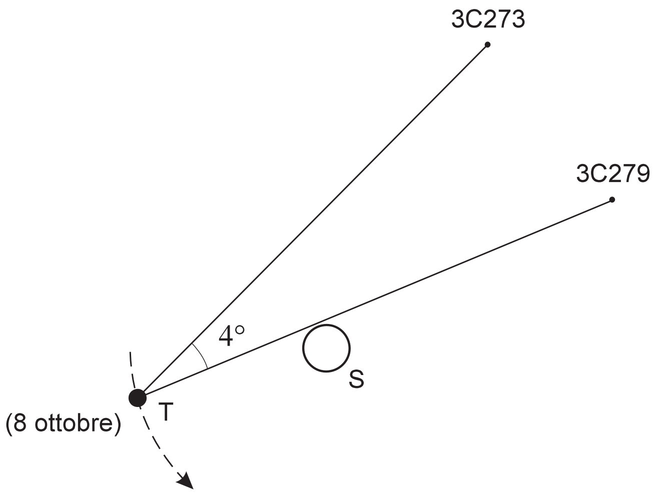


fig. 7–2

È sufficiente che una delle due radiosorgenti sia vicina al Sole, nel senso della nostra linea di vista, perché solo allora la deflessione è abbastanza grande. Per anni si è sfruttato il fatto che esiste una coppia di quasar come indicate in fig. 7–2, fatte apposta per i nostri scopi. I nomi delle due radiosorgenti indicano semplicemente i n. 273 e 279 del catalogo di Cambridge delle radiosorgenti (classe 3). Sono piuttosto intense e formano tra loro un angolo abbastanza piccolo, circa 4°.

Una di esse è occultata dal Sole, una volta l'anno, mentre l'altra no. Possiamo quindi misurare l'angolo che separa le quasar quando sono lontane dal Sole e quando invece una delle due appare radente al Sole. Immediatamente prima dell'occultazione la quasar si trova vicina al bordo del Sole, perciò la radiazione che arriva a noi viene deviata dell'angolo (7–1), che per il Sole vale 1.75″. Quando poi il Sole passa oltre, la quasar riappare all'altro bordo e la radiazione viene deviata in senso contrario.

Che cosa sono gli interferometri a grande base, di cui ho parlato poco fa? Sappiamo che la risoluzione angolare di un telescopio è inversamente proporzionale al suo diametro. Usando più radiotelescopi, distanti migliaia di chilometri l'uno dall'altro, che lavorano in sincronismo, si realizza un interferometro la cui risoluzione è quella di un telescopio di diametro pari alla distanza fra i telescopi singoli. Si arriva così a qualche millesimo di secondo d'arco.

Giocando poi sul fatto che questa situazione si può ripetere tutti gli anni senza condizionamento di eventi meteorologici, si guadagna in precisione ripetendo la misura più volte. Oggi è possibile misurare la deflessione gravitazionale anche per radiosorgenti lontanissime dal Sole (a 90° di distanza angolare dal Sole). Il risultato è che la previsione di Einstein è verificata meglio dell'uno per mille, e per un largo intervallo di distanze del percorso della luce dal centro del Sole.

Lenti gravitazionali

Immaginiamo che una quasar stia dietro a una certa distribuzione di materia di densità variabile (galassia), fatta sostanzialmente di stelle e di gas, trasparente alla radiazione e.m.: come qualunque distribuzione di materia, essa produce una deflessione gravitazionale. A differenza del Sole però non è costituita da materia concentrata; perciò l'angolo di deflessione non decrescerà inversamente alla distanza dal centro, ma varierà in modo più complicato, come accennato nella fig. 7–3.

Nel caso in figura, della sorgente originale vediamo tre immagini: una è la sorgente vera e le altre due sono sue immagini virtuali. La distribuzione di materia è però tridimensionale, e questo rende possibile la formazione di più immagini. Ci sono casi in cui di una quasar si vedono 5 immagini, disposte a croce.

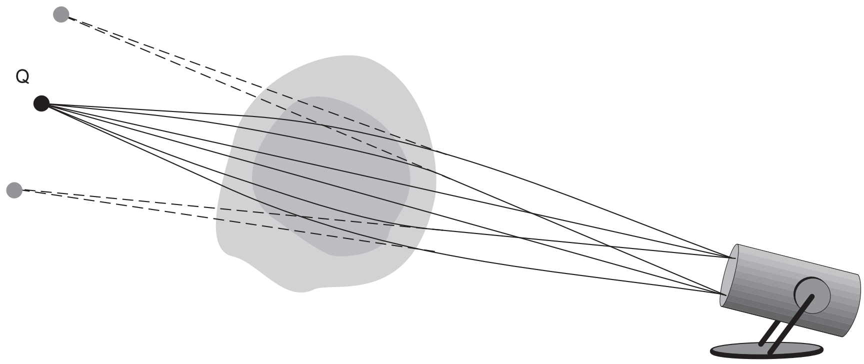


fig. 7–3

Ma come possiamo riconoscere se le varie immagini si riferiscono alla stessa quasar o sono semplicemente sorgenti distinte? Basta esaminare lo spettro: le quasar emettono anche nel visibile e nel loro spettro presentano righe di assorbimento, tipiche degli spettri stellari. Come ho già accennato, le quasar sono sorgenti molto lontane, quindi le righe hanno un notevole redshift (cosmologico), la cui entità dipende dalla distanza della sorgente (in prima approssimazione è proporzionale alla distanza: legge di Hubble). Se i redshift delle varie immagini coincidono, è ragionevole supporre che si tratti di un'unica sorgente.

Le verifiche "classiche" della RG

Si chiamano così le verifiche dei tre effetti già previsti da Einstein:

1. precessione del perielio di Mercurio.
2. deflessione gravitazionale della luce
3. redshift gravitazionale

La precessione del perielio di Mercurio:

Ho già accennato nella seconda lezione a "un indizio trascurato," e ho ricordato che questo comportamento "strano" di Mercurio fu spiegato da Einstein come conseguenza delle sue equazioni, appena trovate, e senza bisogno di nessuna ipotesi addizionale. Purtroppo una spiegazione del modo come la precessione risulta dalla RG è decisamente al di fuori delle possibilità di una presentazione elementare, quindi dobbiamo rinunciare a descriverla.

Questo non vuol dire però che l'argomento debba essere ignorato: al contrario, si tratta di un esempio straordinario per capire che cos'è una teoria scientifica e il suo potere predittivo. Einstein non costruì la RG per spiegare il moto di Mercurio: seguì una linea di ragionamento del tutto diversa. Ma una volta arrivato alle equazioni che collegavano la massa del Sole e la curvatura dello spazio-tempo nel suo intorno, quel comportamento di Mercurio ne seguiva con inderogabile necessità! Il 17 gennaio 1916 Einstein scriveva a P. Ehrenfest: "Per alcuni giorni, sono rimasto fuori di me per l'eccitazione e per la gioia."

La deflessione gravitazionale della luce:

Questa, come la seguente, è una vera e propria previsione, nel senso di un fenomeno che discende dalla teoria ma a quel tempo non era mai stato osservato.

Abbiamo già detto che su piccola scala possiamo descrivere la deflessione partendo dal fatto che la radiazione e.m. deve andare in linea retta in un RI (in caduta libera); ma vista dalla Terra, che non è un RI nel senso di Einstein, la luce curva la sua traiettoria. Noi diciamo impropriamente "a causa della forza di gravità." In poche parole, ancor più impropriamente: la luce viene deflessa da un campo gravitazionale.

Esiste in proposito un complesso di discorsi confusi che si trovano di frequente nelle trattazioni divulgative (ma non solo ...). Vi espongo la linea del ragionamento, anche se per ora non posso darne la critica puntuale. Si dice: per l'equivalenza massa–energia, anche un fotone, che trasporta energia, ha massa. Ma ogni massa inerziale è anche gravitazionale, quindi soggetta a forza in un campo gravitazionale. Da qui segue che anche la luce non può viaggiare in linea retta in un campo gravitazionale, ma viene deviata.

Sulla cosiddetta "equivalenza massa–energia" tornerò ampiamente a suo tempo e mostrerò quanto scorretto sia usarla al modo appena visto. Per ora non aggiungo altro.

Tornando alla deflessione dedotta dal PE, vi ricordo che su grande scala, in un campo non uniforme, il semplice discorso del rif. non inerziale non funziona. Purtroppo questo è uno dei punti dove una trattazione elementare deve arrestarsi.

Il redshift gravitazionale:

Consideriamo l'astronave accelerata (problema 5 della scorsa lezione): abbiamo già visto che in essa c'è una variazione tra la frequenza emessa alla base e quella rivelata alla sommità (una diminuzione se l'onda e.m. si propaga nella direzione in cui l'astronave accelera).

Per il PE questo deve accadere anche sulla Terra, in presenza di un campo gravitazionale, perché l'astronave accelerata equivale a un rif. fermo in un campo gravitazionale. Quindi: un campo gravitazionale produce un redshift (*gravitazionale*, da non confondere con quello cosmologico, di cui riparleremo).

Notate che per questo ragionamento si usano tre sistemi di riferimento:

K_0: RI in assenza di gravità, di cui abbiamo bisogno per fare i conti in partenza

K' : rif. dell'astronave accelerata

K : rif. fermo sulla Terra.

Quello che succede in K' succede anche in K alla stessa maniera; quindi se nell'astronave accelerata si vede un certo effetto, questo si deve vedere pure sulla Terra.

In altre parole: se prendiamo l'astronave, e invece di mandarla nello spazio con i motori accesi la lasciamo sulla Terra, corredata degli stessi strumenti di misura, si dovrà notare (registrare, misurare) lo stesso effetto. Einstein nel 1911 proprio con questo ragionamento fa la prima previsione dell'esistenza del redshift gravitazionale.

Se metto sul pavimento un trasmettitore e sul soffitto un ricevitore, la frequenza della radiazione rivelata è più piccola di quella emessa secondo la relazione che abbiamo già scritta:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{v}{c} = -\frac{gh}{c^2}. \tag{7–1}$$

Commenti e note:

1. Il ragionamento è approssimato: vale se $\frac{1}{2}g\,t^2 \ll h$ ossia se $gh/c^2 \ll 1$, e se il campo gravitazionale può essere ritenuto uniforme.
2. Stessa considerazione per l'effetto Doppler, che si tratta al primo ordine in v/c.

La prima verifica sperimentale (Pound e Rebka) è del 1960 ed è stata possibile grazie all'effetto Mössbauer. Si usano i γ molli emessi dal ^{57}Fe (prodotto di decadimento del ^{57}Co). L'effetto Mössbauer consiste nel fatto che i nuclei che emettono i fotoni sono "legati" al cristallo, e questo fa sì che la riga emessa sia molto stretta (larghezza relativa dell'ordine di 10^{-12}).

Abbiamo visto però che sulla Terra $\delta\nu/\nu = 10^{-16}$ per metro di dislivello; nel primo esperimento il dislivello era 25 m, quindi la variazione di frequenza era molto minore della larghezza delle righe. Si è dovuto perciò ricorrere a espedienti raffinati, di cui qui non possiamo parlare.

Per una sorgente astronomica (Sole, stelle) l'approssimazione $gh/c^2 \ll 1$ non è più valida perché h è la distanza Sole–Terra o stella–Terra, e certo il campo non è uniforme. Dal punto di vista di un omino sulla superficie del Sole, la situazione è analoga a quella già trattata, perché la luce "sale" nel campo gravitazionale, ma poi la gravità diminuisce con la distanza... Il calcolo esatto, condotto con le relazioni complete della RG, conduce all'espressione:

$$\frac{\nu_\mathrm{r}}{\nu_\mathrm{e}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 R}}.$$

Per il Sole $2GM/c^2R$ vale circa $4 \cdot 10^{-6}$, quindi l'effetto sarebbe molto maggiore che sulla Terra. La difficoltà è però di conoscere la frequenza emessa, per più ragioni:

– presenza di campi magnetici, che allargano le righe per effetto Zeeman
– moti convettivi, che producono effetto Doppler
– ulteriore allargamento delle righe dovuto alla pressione (interazione di un atomo con quelli vicini).

Il risultato è che non ci sono verifiche convincenti nel caso del Sole.

La situazione è migliore per le nane bianche (stelle molto compatte, con massa circa pari a quella del Sole ma con raggio molto più piccolo, dell'ordine di 10 000 km): in questo caso il redshift vale circa 10^{-4}. Qui la difficoltà è un'altra: distinguere il redshift gravitazionale dal "banale" effetto Doppler, dovuto al moto della stella rispetto a noi.

Infatti per la gran parte delle stelle l'unico modo per rivelare quel moto è proprio l'osservazione di uno spostamento delle righe spettrali, verso il rosso o verso il blu. Stando così le cose, siamo in un giro vizioso: non possiamo usare lo spostamento osservato per misurare la velocità, e poi sperare di rivelare allo stesso tempo il redshift gravitazionale!

Per fortuna ci sono alcune nane bianche vicine, per le quali è stato possibile ricavare il moto da misure esclusivamente geometriche (non posso ora addentrarmi nei dettagli). In questi casi si è riusciti a rivelare il redshift gravitazionale, ma c'è un altro problema: nella formula entrano massa e raggio della stella, che non sono noti. Esiste solo la teoria che fornisce una relazione fra massa e raggio: mettendo insieme teoria e osservazioni, si arriva quindi a determinare i due parametri, ottenendo valori del tutto ragionevoli. Di più non si riesce a fare.

Nel 1911 Einstein diede un'altra dimostrazione del redshift gravitazionale, indipendente dalla precedente e basata sull'inerzia dell'energia. Detto molto in breve, il ragionamento (esperimento ideale) è questo:

a) Si prende un corpo di data massa e lo si solleva a una certa altezza, facendo un certo lavoro.
b) S'invia al corpo una certa quantità di energia sotto forma di radiazione. Il corpo l'assorbe, e la sua massa aumenta.
c) Si riporta il corpo in basso, ricavando più lavoro di quello ceduto.
d) Gli si sottrae l'energia assorbita.

Se non ci fosse il redshift, il giochetto ci permetterebbe di tirar fuori più energia di quanta ne abbiamo data.

Ma di questa dimostrazione non possiamo parlare adesso, prima di aver trattato l'argomento centrale: appunto l'inerzia dell'energia.

Nota didattica

Nella s.s.s. la deflessione gravitazionale della luce può essere affrontata piuttosto presto: è un fatto abbastanza elementare che non presenta punti critici. È sufficiente che i ragazzi abbiano capito il PE. Il redshift gravitazionale è molto più complesso. Per ricavarlo occorre usare tre rif., passare nel modo giusto da uno all'altro, usare correttamente il PE, ecc.

Ma soprattutto mi preoccupa il rischio che parlando di redshift gravitazionale si lascino entrare senza volerlo nella testa degli studenti strane idee circa "la gravità che rallenta gli orologi" o addirittura "che rallenta il tempo." Più avanti vi proporrò una strada diversa per ragionare su questi fenomeni. Ho raccontato il redshift gravitazionale come applicazione del PE solo per seguire lo sviluppo storico; oggi, a 85 anni di distanza, è meglio non seguire questa strada. Abbiamo altri fatti sperimentali, altri strumenti, altre tecniche; per cui a mio parere esistono percorsi didatticamente più adatti.

Problemi

1. Gli effetti che abbiamo discussi dipendono tutti dal rapporto tra la grandezza GM/c^2 e il raggio (della Terra, del Sole...). GM/c^2 ha le dimensioni di una lunghezza. Nasce perciò l'idea di usare unità di misura in cui $G = 1$, $c = 1$, sì che massa ed energia abbiano dimensioni di una lunghezza.

Calcolare:
- la massa in kg pari a 1 metro
- la massa della Terra in metri
- la massa del Sole in metri.

2. Esiste un'analogia fra le lenti gravitazionali e il miraggio? Spiegare.

3. Per un oggetto di massa pari al Sole, a che distanza la luce gli girerebbe intorno in cerchio?

4. Che succede se si prova a sincronizzare, in un'astronave accelerata, due orologi uno a poppa ed uno a prua?

Risposte

Problema 1. (Unità geometriche di massa):

Posto $R = GM/c^2$, tutto si riduce a calcolare M dato R o viceversa. Poiché $M_\oplus = 5.97 \cdot 10^{24}$ kg e $M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}$ kg, le risposte sono:
- 1 metro equivale a $1.35 \cdot 10^{27}$ kg.
- La massa della Terra è $4.44 \cdot 10^{-3}$ m.
- La massa del Sole è $1.48 \cdot 10^3$ m.

Problema 2. (Lenti gravitazionali e miraggio):

L'analogia esiste, in questo senso. Nel caso del miraggio, la luce che proviene dall'oggetto può raggiungere l'occhio dell'osservatore per due (o più) vie: quella diretta, e il percorso incurvato in prossimità della superficie calda del terreno. Questo dà l'impressione di una sorgente sdoppiata.

Nel caso di una lente gravitazionale accade qualcosa di simile: la luce che proviene da una sorgente lontana viene deflessa da un corpo interposto (tipicamente una galassia). Può accadere che la luce arrivi al telescopio per più percorsi diversi (anche 5) producendo quindi altrettante immagini dello stesso oggetto (fig. 7–3).

La differenza sta nella causa fisica della deviazione: nel miraggio si tratta di variazioni dell'indice di rifrazione dell'aria con la temperatura; nella lente gravitazionale invece è la geometria dello spazio-tempo attorno alla lente che è deformata e altera la propagazione della luce.

Problema 3. (La luce in cerchio):

Nel problema 6 della scorsa lezione abbiamo trovato l'equazione cartesiana del raggio di luce:

$$y = \frac{g\,x^2}{2\,c^2}.$$

Da questa si ottiene $y'' = g/c^2$, quindi il raggio di curvatura nel vertice della parabola è $\varrho = c^2/g$.

D'altra parte $g = GM/R^2$, quindi

$$\varrho = \frac{c^2 R^2}{GM}.$$

Basta imporre $\varrho = R$, e si arriva a $R = GM/c^2 = 1.48 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ come abbiamo visto nel problema 1.

Però questo calcolo può dare solo l'ordine di grandezza, non il risultato esatto: infatti le equazioni della RG portano a un valore 3 volte maggiore. Come mai?

Non possiamo certo spiegare il fattore 3, ma possiamo renderci conto dell'approssimazione insita nel calcolo. La soluzione del problema 4, nella scorsa lezione, ha fatto uso del PE: ci siamo messi in un ascensore in caduta libera nel campo della Terra, ecc. Questo è del tutto corretto, e non implica nessuna approssimazione. Ma ora abbiamo usato per g l'espressione newtoniana GM/R^2, e ciò è accettabile solo se il campo gravitazionale è debole, ma non lo è nelle condizioni di questo problema

Amche la trasformazione dal rif. in caduta libera a quello "fermo," che è stata fatta secondo le prescrizioni galileiane, non possiamo aspettarci che conservi validità nelle nuove condizioni. Si noti: non a causa della velocità relativa dei due rif., che sarà piccola, visto che interessa solo l'inizio della caduta; ma perché lo spazio-tempo è fortemente deformato. Per esempio, la misura del tempo nei due rif. non è certo la stessa; ma per ora non possiamo dire di più.

Problema 4. (Orologi nell'astronave accelerata):

Il problema 5 della lezione precedente ci ha portato alla formula

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{ah}{c^2}$$

per la variazione di frequenza, nel senso che un segnale emesso con frequenza ν a poppa arriva a prua con frequenza $\nu' = \nu + \delta\nu$ ($\delta\nu < 0$).

Se a poppa c'è un orologio, nel tempo T segnato da questo il trasmettitore emetterà $N = \nu T$ cicli del segnale, che verranno ricevuti a prua nello stesso numero N, ma con frequenza minore. La durata del segnale ricevuto sarà dunque

$$T' = \frac{N}{\nu'} = \frac{N}{\nu + \delta\nu} = T\left(1 - \frac{\delta\nu}{\nu}\right) = T\left(1 + \frac{ah}{c^2}\right).$$

Dunque i due orologi non sono sincronizzati: mentre quello di poppa segna il tempo T, quello di prua segna $T' > T$. Ho di proposito usato "mentre," parola che nel linguaggio comune dà il senso di una contemporaneità, proprio per indicare come ci si può far influenzare da usi linguistici…

In realtà la sola cosa che si può dire è che l'intervallo segnato dal primo orologio durante l'emissione del segnale è più breve di quello segnato dal secondo durante la ricezione dello stesso segnale; ma su quale sia la corretta *interpretazione* di questo *fatto*, dovremo discutere.

LEZIONE 8

L'esperimento di Hafele e Keating

Il primo dei "nuovi esperimenti," che come ho già detto rendono oggi molto più facile insegnare la relatività evidenziandone fin dall'inizio gli aspetti fisici essenziali, è quello realizzato nel 1971 da Hafele e Keating.

Per i nostri scopi l'esperimento H–K si presenta in poche parole: consiste nel montare due orologi atomici su due aerei che fanno il giro del mondo, l'uno in senso orario, l'altro in senso antiorario (uno verso Est, l'altro verso Ovest). Gli orologi sono stati regolati alla partenza in modo da segnare lo stesso tempo; quando atterrano di nuovo all'aeroporto dal quale sono partiti, si trova che segnano tempi diversi. Più esattamente, alla fine del viaggio, durato un po' più di due giorni, l'orologio che aveva viaggiato verso Ovest era avanti rispetto all'altro di 332 ns.

Per discutere e interpretare l'esperimento ci conviene schematizzarlo. In primo luogo supporremo che tutto il viaggio degli aerei si svolga lungo l'equatore, cosa che nell'esperimento reale non era: gli aerei erano normali aerei di linea, e quindi percorrevano le rotte usuali; inoltre partenza e arrivo avvennero a Washington. Un'altra semplificazione consiste nel supporre che il moto degli aerei sia uniforme (con la stessa velocità per entrambi) e la quota costante; in particolare trascureremo le variazioni di quota al decollo e all'atterraggio. La cosa non è priva d'influenza, e per confrontare i risultati trovati con la teoria occorre tenerne conto; ma ora sarebbe troppo complicato pensarci. Mi limito a ricordare che quando più avanti parleremo di accordo fra teoria ed esperimento, il confronto andrà inteso tenendo conto di tutto: variazioni del percorso, della velocità, della quota… È complicato, ma è possibile.

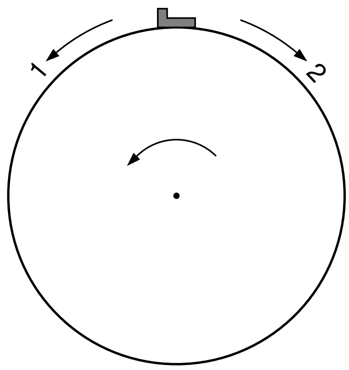


fig. 8–1

Dunque gli orologi partono dall'aeroporto A posto all'equatore (fig. 8–1); l'orologio 1 gira in senso antiorario, l'orologio 2 in senso orario. Quando ritornano in A, si confronta l'intervallo di tempo $\Delta\tau_1$ segnato dall'orologio 1 con quello $\Delta\tau_2$ segnato dall'orologio 2. L'esperimento mostra che $\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$: questo dobbiamo discutere e interpretare.

Ma prima non posso evitare una piccola divagazione sulla fig. 8–1 e sul linguaggio che ho usato. Ho detto "l'orologio 1 gira in senso antiorario" e voi non ci avrete trovato niente da ridire. Eppure qualcosa da dire c'è: avrei dovuto dire "gira in senso antiorario guardando da Nord." Allo stesso modo, sebbene sia corretto dire che la Terra ruota da Ovest a Est, non è altrettanto corretto dire che la rotazione è antioraria. Lo è solo se vista da Nord, mentre per chi la guardi da Sud è oraria. È solo il fatto che noi viviamo nell'emisfero settentrionale, unito alla priorità storica che l'area mediterranea e l'Europa hanno avuto nello sviluppo scientifico, a farci vedere come naturale un punto di vista che è solo uno di due possibili e ugualmente leciti.

Discussione dell'esperimento

Prima di tutto: contro le apparenze, i due orologi non sono in condizioni simmetriche, causa la rotazione terrestre. In un RI che si muove insieme alla Terra ma senza ruotare, e che chiamerò K, l'orologio 1 ha velocità maggiore di 2. Anzi: rispetto a K ambedue gli orologi viaggiano verso Est: questo perché la velocità di un aereo normale è minore della velocità periferica della Terra. Infatti quest'ultima all'equatore vale circa 460 m/s, ben superiore alla velocità del suono; ma gli aerei di linea non sono supersonici! Del resto, una prova diretta si ha osservando che chi viaggi su un aereo che attraversa l'Atlantico verso Ovest non vede il Sole spostarsi verso Est.

Dunque la differenza fra i due aerei è che (sempre rispetto a K) uno viaggia più velocemente dell'altro, perché 1 somma la sua velocità a quella della Terra, mentre 2 la sottrae.

Il condizionamento dovuto alla tradizione spinge a leggere il risultato dell'esperimento H–K in un certo modo, che non è il migliore. Questo è un punto centrale, che occorre esaminare attentamente: è molto facile credere che l'esperimento dimostri che *il tempo segnato da un orologio dipende dal suo moto.* Perciò il centro della nostra discussione sarà proprio su questo specifico punto, e voglio dedicargli lo spazio che merita. Però prima è meglio sgomberare il terreno da possibili dubbi, posti in certo senso a monte, e relativi alla stessa affidabilità dell'esperimento.

Ma il ritardo è genuino?

Il primo dubbio che può venire in mente è: come possiamo sapere che durante il viaggio sugli aerei gli orologi non siano stati disturbati in qualche modo? Si tratta di un dubbio niente affatto diverso da quelli che ci si pone in qualunque esperimento di fisica. Quando si fa un esperimento di questo genere ci si deve assicurare che i campi magnetici, la temperatura, la pressione atmosferica, ecc., non lo disturbino, introducendo errori sistematici. Tutto ciò si può verificare, perché per esempio si può simulare un viaggio in aereo, si possono riscaldare o raffreddare gli strumenti, sottoporli a variazioni di pressione ecc. È chiaro che prove del genere vanno fatte; però tale esigenza non solleva alcuna questione di principio.

È giusto ricordare che agli esperimenti non si deve credere ciecamente: un esperimento può anche essere sbagliato, può essere stato fatto in condizioni scorrette. Ma occorre tener presente che gli esperimenti significativi vengono verificati, analizzati, vagliati sotto tutti i punti di vista: alcuni resistono, altri no. Dal momento che l'esperimento H–K ha retto alle critiche, conviene accettarne il risultato.

La marcia di un orologio non dipende dal suo moto

Ma allora, perché non si può dire che il tempo segnato dall'orologio dipende dalla velocità dell'aereo? In primo luogo, per il PR. Questo ci obbliga a dire che ogni orologio che sta in un RI è uguale a qualunque altro. Non ci può essere nessuna differenza tra i due: altrimenti l'esperimento ci permetterebbe di determinare lo stato di moto di un orologio. Parlare di un effetto dello stato di moto sul comportamento degli orologi, significa andare contro il PR.

Naturalmente ci si può salvare osservando che l'effetto non è "intrinseco" all'orologio, ma solo apparente; un tale modo di presentare la cosa ha però più di un difetto. Il primo è di natura didattica: sebbene questa via d'uscita — che poi è quella tradizionale — non sia erronea in sé, è però molto difficile presentarla correttamente, ossia in modo che non venga confusa con l'interpretazione "ingenua" vista sopra: quella che va contro il PR. Credo che un buon 99% degli oppositori della relatività (una specie ancora molto fiorente) sia appunto stata indotta in errore dalla confusione tra i due punti di vista; e quel che è peggio, credo — con qualche prova di fatto — che la gran parte degli studenti cada nello stesso equivoco.

La seconda controindicazione all'interpretazione "ortodossa" è che essa apre la strada a una serie di fraintendimenti filosofici (presunto ruolo dell'"osservatore," soggettività dei dati dell'esperienza, ecc.) che non hanno niente a che fare con la fisica, ed è bene tenere lontani il più possibile. Ne abbiamo già parlato, e non starò a ripetermi.

Ma soprattutto: qui non stiamo discutendo il classico caso di due orologi in moto relativo uniforme, osservati dal rif. in cui uno è fermo e l'altro è in moto. Qui ci sono sì due orologi, ma nel momento in cui li confrontiamo — alla partenza e all'arrivo — essi sono in quiete relativa: entrambi fermi all'aeroporto. Quest'osservazione apre però la porta a un'obiezione più fondamentale, che ora dobbiamo esaminare: visto che partono e arrivano insieme, i due orologi non possono trovarsi entrambi in RI, che per definizione sono in moto relativo TRU (traslatorio rettilineo uniforme).

A dire il vero, i RI di cui ho appena parlato sono quelli newtoniani: resterebbe aperta la possibilità che due RI in caduta libera possano effettivamente reincontrarsi. In casi speciali ciò accade (vi lascio di scoprire come e quando) ma non ce ne dobbiamo preoccupare: di sicuro i nostri aerei *non sono in caduta libera*!

Ma gli orologi non sono in riferimenti inerziali!

Ma se un aereo che viaggia intorno alla Terra non è un RI, il mio richiamo al PR è fuori luogo. Ecco un'obiezione che a prima vista sembra insormontabile...

È senz'altro vero che gli orologi sono accelerati, con accelerazione v^2/R (v essendo la velocità rispetto a K). A conti fatti, le accelerazioni sono risp. $0.07\,\mathrm{m/s^2}$ e $0.009\,\mathrm{m/s^2}$: in entrambi i casi piccole rispetto a g, oltre un fattore 100 (il che prova che non sono in caduta libera). Ma nemmeno un orologio fermo sulla Terra è in caduta libera; perciò la vera domanda diventa questa: che effetto ha sugli orologi atomici usati da Hafele e Keating, il fatto che gli aerei sono accelerati?

Qui ci torna utile in primo luogo il PE, che ci assicura che l'effetto di tali accelerazioni sarà equivalente a quello di una variazione di g: nel nostro caso, una variazione inferiore all'1% (non dimenticate che sugli aerei agisce anche la forza di gravità: l'accelerazione ha solo l'effetto di cambiarne un po' il valore).

È poi il momento di mettere a frutto la lunga discussione che abbiamo fatta, nelle prime due lezioni, sugli orologi come strumenti e sulla loro eventuale sensibilità a diverse perturbazioni, inclusa un'accelerazione. Abbiamo già detto genericamente che per gli orologi atomici l'effetto di un'accelerazione è trascurabile; ma ora da un lato capite perché ci serviva preoccuparcene, dall'altro abbiamo un criterio quantitativo: dato che l'effetto osservato è di 332 ns su 50 ore, ossia un po' meno di $2 \cdot 10^{-12}$, dobbiamo assicurarci che un orologio atomico non venga disturbato in questa misura da variazioni di g inferiori all'1%.

Per fortuna, sappiamo che la marcia un orologio atomico è influenzata in modo trascurabile da variazioni di g di quell'ordine. Questo però non si decide con sole considerazioni teoriche: occorre sapere come l'orologio atomico funziona, e meglio ancora chiedere a un esperto di orologi atomici se dobbiamo preoccuparci o no. La risposta è no: a questo livello gli effetti dell'accelerazione degli aerei sono irrilevanti.

Di passaggio, la discussione appena fatta mostra su un esempio concreto ma fondamentale che cosa vuol dire la mia insistenza sul fatto che la relatività è una. Abbiamo visto che non si può discutere un problema che tradizionalmente sarebbe considerato di RR, senza far uso del PE, ossia senza idee che appartengono alla RG.

Il tempo assoluto non esiste

Riepilogando: il moto, nel senso di moto uniforme dell'aereo, non ha effetto grazie al PR. Quanto all'accelerazione centripeta del rif., possiamo ritenerla equivalente alla forza di gravità: l'effetto di questa sull'orologio possiamo studiarlo in laboratorio e mostrare che è trascurabile.

Insisto che siamo a un punto cruciale, perché il modo più comune di trattare l'argomento è opposto: si parla di effetto del campo gravitazionale e del moto degli orologi. Abbiamo qui una discriminante riguardo a quanto detto all'inizio del corso, circa la tendenza a creare complicazioni inutili. Se si fanno discorsi sull'influenza del campo di gravità e del moto degli orologi, si è sulla strada di creare una nebbia di "influenze" misteriose, dalla quale l'allievo forse non potrà più uscire.

Torniamo ora all'esperimento. Sappiamo che gli orologi vanno bene, che non ci sono ragioni fisiche perché non debbano segnare il tempo giusto; quindi se nell'esperimento H–K essi, partiti d'accordo, ritornano segnando tempi diversi, *non si può più parlare di tempo assoluto*: ciascun orologio segna il *suo* tempo, che dipende dal modo come esso percorre lo spazio-tempo. È una conclusione difficile da accettare, ma ancor più difficile da sfuggire.

Per quello che vale (ma vale molto di più di quanto può sembrare a prima vista) propongo un'analogia con i percorsi stradali. È fin troppo ovvio che non c'è *una* distanza fra due città: dipende dalla strada. E non ci verrà certo in mente di dire che il contachilometri della nostra macchina cambia modo di funzionare a seconda della strada che facciamo: è la lunghezza del percorso che non è assoluta. Le due città stanno dove stanno sulla superficie della Terra; ma dall'una all'altra si può andare per più strade (concettualmente infinite) e ciascun percorso ha una sua lunghezza. Nessuno ci trova niente di strano, solo perché ci siamo abituati per lunga esperienza.

Quello che ora stiamo scoprendo è che con lo spazio-tempo succede la stessa cosa: fissati due punti dello spazio-tempo, esistono infiniti percorsi (ossia moti di corpi) che li uniscono, e ciascuno ha una sua "lunghezza" (leggi: tempo segnato dall'orologio). È questo quadro concettuale che in relatività sostituisce il tempo assoluto newtoniano. Il seguito del nostro discorso sarà ora dedicato a precisare e mettere in forma quantitativa, matematica, quest'idea.

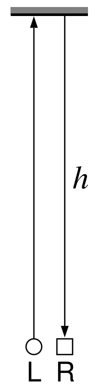


fig. 8–2

L'orologio a luce

Abbiamo ormai capito che per risolvere i problemi che abbiamo incontrato dobbiamo rivedere le nostre idee sul tempo. La maniera più semplice di arrivarci è di presentare l'*orologio a luce*.

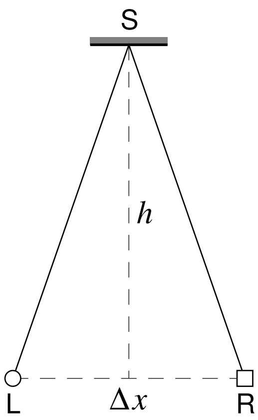


fig. 8–3

Questo consiste di una sorgente L (fig. 8–2) che manda un segnale luminoso verso l'alto, dove a distanza h c'è uno specchio S, che riflette la luce verso il basso. Proprio accanto a L c'è un rivelatore R che vede il segnale riflesso, lo conta, e trasmette a L il comando di emettere istantaneamente un nuovo segnale. Naturalmente l'intervallo di tempo tra due scatti successivi del contatore sarà il tempo impiegato dalla luce ad andare e tornare, cioè $2h/c$: questo tempo lo chiamiamo $\Delta\tau$. La più importante proprietà di un tale orologio è che il suo periodo dipende esclusivamente dalla distanza fra sorgente-rivelatore e specchio.

Supponiamo ora che l'orologio a luce sia in moto rispetto al nostro laboratorio, e vediamo come appariranno le cose nel rif. del laboratorio (fig. 8–3). Mentre la luce sale, lo specchio si sposta verso destra, e lo stesso fa anche il rivelatore: perciò la luce che arriverà a R viaggia obliquamente.

Chiamiamo Δx lo spostamento dell'orologio nel tempo di andata e ritorno, e indichiamo con h, come prima, la distanza verticale tra la sorgente e lo specchio. Vogliamo calcolare il tempo Δt che la luce ha impiegato a fare il percorso LSR.

Lo spazio percorso è

$$c\,\Delta t = 2\sqrt{h^2 + (\Delta x/2)^2} = \sqrt{c^2\Delta\tau^2 + \Delta x^2} \tag{8–1}$$

da cui

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t^2 - \Delta x^2/c^2}. \tag{8–2}$$

È importante notare che qui abbiamo usato l'invarianza della velocità della luce, perché abbiamo sottinteso che la luce viaggia con la stessa velocità c in entrambi i rif.[1]

Il tempo proprio

Occorre subito chiarire il significato dei due intervalli di tempo Δt e $\Delta\tau$. Il primo è il tempo segnato da un orologio che sta fermo nel rif. del laboratorio, mentre $\Delta\tau$ è il tempo segnato dall'orologio a luce, che si muove rispetto al laboratorio. Teniamo presente che l'orologio a luce si porta dietro il suo contatore; anche se l'orologio si sposta noi possiamo leggere il contatore, e così conoscere il tempo segnato dall'orologio. Il tempo dell'orologio a luce è dunque *obbiettivo*, nel senso che può essere osservato da chiunque, leggendolo sul quadrante, o essere trasmesso via radio. Lo chiamiamo perciò *tempo proprio*.

D'altra parte possiamo misurare Δt, e anche Δx, nel nostro laboratorio. Allora la formula (8–2) può essere interpretata dicendo che ci sono due modi di determinare il tempo $\Delta\tau$ segnato da un orologio in moto: uno è di leggerlo direttamente, l'altro è di ricavarlo a partire dal tempo Δt segnato da un orologio fermo e dallo spostamento Δx che ha fatto l'orologio in moto.

Questo discorso è importante perché ci fa capire che $\Delta\tau$ ha il carattere di un *invariante*. Se ci mettiamo in un RI diverso da quello del laboratorio, in cui l'orologio si muova a una diversa velocità, anche in questo rif. dovrà valere la (8–2), con lo stesso $\Delta\tau$. Ma lo spostamento $\Delta x'$ dell'orologio è certamente diverso da Δx, e allora anche $\Delta t'$ sarà diverso da Δt; però avremo sempre

$$\Delta\tau = \sqrt{\Delta t'^2 - \Delta x'^2/c^2}. \qquad (8\text{–}3)$$

La (8–3) ci dice che mentre $\Delta\tau$ — cioè il tempo segnato dall'orologio a luce — è sempre lo stesso, perché lo si legge direttamente sul quadrante, invece Δt e Δx cambiano da un rif. all'altro. Notate che la variazione dello spostamento è ovvia, trattandosi di rif. in moto relativo; ma la variazione del Δt non lo è affatto, e mostra appunto il carattere *relativo*, non più assoluto, del tempo. Ciò che resta sempre vero è che si può calcolare il tempo proprio dell'orologio dalla (8–2) (che nell'altro rif. si scrive (8–3)): il tempo proprio è *invariante*.

Tempo proprio e geometria dello spazio-tempo

Esiste un'importante analogia tra la situazione attuale e quella che si ha nella geometria analitica del piano euclideo. Consideriamo due punti A e B, uniti da un segmento di lunghezza Δl (fig. 8–4). Disegnati due assi cartesiani indichiamo con Δx, Δy le proiezioni del segmento sugli assi.

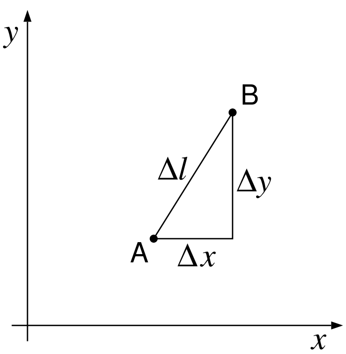


fig. 8–4

Per mettere in evidenza l'analogia, osserviamo che ci sono due modi per determinare la lunghezza di un segmento. Uno è di prendere un metro e misurare la lunghezza direttamente (l'equivalente di andare a leggere quanto segna il nostro orologio a luce). Da questo punto di vista, la lunghezza è una proprietà *intrinseca* del segmento: indipendentemente dal sistema di coordinate, se si prende un metro e si misura un segmento si otterrà sempre lo stesso risultato.

(1) Abbiamo anche supposto che la distanza h risulti la stessa nei due rif. Lo si può dimostrare senza difficoltà, ma in queste lezioni avevo preferito ignorare il problema. Anche questo è un punto dove sono incerto sulla scelta più opportuna: forse si potrebbe accennare che il problema esiste, senza insistere.

Però se ho scelto un SC, e se conosco Δx e Δy, allora posso fare a meno di misurare il segmento con il metro: posso calcolare la lunghezza Δl a partire da Δx e Δy con la formula ben nota:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \tag{8–4}$$

La differenza è che questa seconda strada usa dei dati (Δx e Δy) che dipendono dal SC. Cambiando SC (fig. 8–5) troverò un altro $\Delta x'$ e un altro $\Delta y'$, ma usando la stessa formula (8–4) dovrò trovare lo stesso risultato di prima:

$$\Delta l = \sqrt{\Delta x'^2 + \Delta y'^2}. \tag{8–5}$$

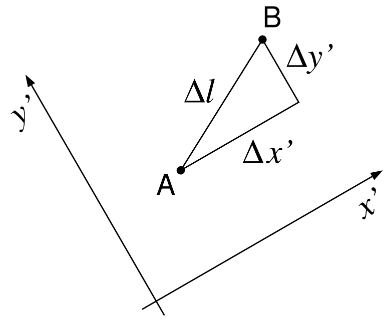


fig. 8–5

Il risultato che si ottiene con la (8–4) è lo stesso per tutti i SC, anche se i due termini Δx e Δy cambiano da un sistema all'altro: la formula esprime un *invariante*.

Tornando al caso che c'interessa, il tempo proprio dell'orologio non dipende dal rif. in cui si fa la misura. L'orologio a luce segna il suo tempo, che è una sua proprietà intrinseca; ma se si vuole collegare questo tempo proprio alle misure fatte in un altro rif., si dovrà usare la formula (8–2), in cui entra il tempo dell'orologio nel laboratorio nel quale si fa la misura, e lo spostamento dell'orologio a luce rispetto a quel rif. Queste sono grandezze che cambiano a seconda del rif.; però il $\Delta\tau$ risultante, che dà il tempo dell'orologio a luce, non cambia.

Le due situazioni che abbiamo esaminato sono molto diverse: in un caso abbiamo a che fare con proprietà geometriche del piano euclideo, che si esprimono con le formule della geometria analitica del piano; nell'altro entra in gioco il PR e l'invarianza della velocità della luce. Ma l'analogia è così stretta che suggerisce un'interpretazione *geometrica* del tempo proprio. La grandezza $\Delta\tau$ della (8–2), che appare come un invariante della situazione fisica, somiglia talmente al Δl della formula geometrica, che si è portati a interpretare $\Delta\tau$ come una "lunghezza" nello spazio-tempo. Quest'idea, di dare un significato geometrico al tempo proprio, e quindi introdurre una *metrica* nello spazio-tempo, è stata il fondamentale contributo di Minkowski alla relatività.

Diagrammi spazio-temporali

A questo punto è utile ragionare in un diagramma spazio-temporale, in cui di solito si mette la coordinata x in ascissa e il tempo (del rif.) in ordinata. Ai punti di questo diagramma è dunque associata una posizione spaziale e un istante temporale: si tratta di *punti nello spazio-tempo*, generalmente chiamati *eventi*.

Notate che i punti hanno però un significato intrinseco, indipendente dal modo come li rappresentiamo in un diagramma spazio-tempo: fisicamente parlando, un evento non è che un fenomeno *ben localizzato nello spazio e nel tempo*. S'intende che "ben localizzato" va inteso rispetto alla scala spaziale e temporale che c'interessa, e che può cambiare anche di molti ordini di grandezza a seconda del contesto di fenomeni di cui ci stiamo occupando: per es. dal decadimento di una particella alla nascita di una persona, all'esplosione di una supernova.

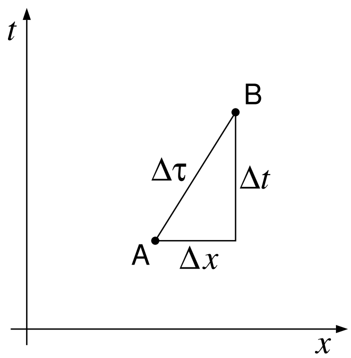


fig. 8–6

Pensando all'orologio a luce, avremo un evento A (fig. 8–6), che è la partenza della luce dalla sorgente, e un evento B, che è il ritorno dell'impulso di luce al rivelatore.

I due eventi avvengono a tempi diversi e in generale anche in posti diversi: quindi le coordinate spazio-temporali di questi eventi sono diverse, sia la x, sia la t. È anche chiaro nella figura il significato di Δx e Δt. Abbiamo poi una "distanza" $\Delta\tau$, che è data dalla (8–2) e che, come nel caso della distanza geometrica tra due punti, non dipende dal rif.

E ora un punto che può dare qualche difficoltà. Vedendo una figura come quella appena descritta, si è portati naturalmente a pensare di doverci applicare la geometria euclidea del piano. Invece questo è sbagliato, perché quando io dico "distanza" non intendo una distanza nel senso della geometria euclidea, ma quella data dalla (8–2): ecco il motivo delle virgolette. Lo spazio-tempo ha una geometria che *somiglia* alla geometria euclidea, nel senso che, a partire dalle coordinate, si può trovare una distanza; la formula però è un po' diversa da quella abituale. La differenza più significativa è che mentre nel caso euclideo il quadrato della distanza è la *somma* dei quadrati delle due grandezze Δx e Δy, nel caso dello spazio-tempo compare una *differenza*. (Questa differenza ha una conseguenza importantissima, che discuteremo più avanti.) La più rilevante proprietà in comune è che entrambe le distanze sono *invarianti*.

In realtà tra le due formule c'è anche un'altra differenza: nella (8–3) c'è un c^2 a dividere, che non compare nella (8–4). Però questa differenza non è essenziale, e la si potrebbe eliminare facilmente: basterebbe ridefinire l'unità di lunghezza o quella di tempo in modo opportuno. Se ad es. convenissimo di misurare tutte le lunghezze in secondi-luce anziché in metri, in queste unità avremmo $c = 1$. La presenza del divisore è quindi un accidente storico: nasce dal fatto che le unità di misura sono state stabilite prima che si capisse l'intima relazione fra spazio e tempo (lo spazio-tempo). Purtroppo a quel punto era troppo tardi per cambiare, a parte il fatto che il secondo-luce come unità di lunghezza sarebbe poco pratico, visto che vale quasi la distanza Terra–Luna...

Parentesi sulle trasformazioni di Lorentz

Avrete notato che la mia esposizione presenta un'inversione rispetto a una trattazione di tipo tradizionale. Di solito la discussione sulla differenza fra Δt e $\Delta\tau$, la definizione di tempo proprio, il suo carattere d'invariante, vengono dopo aver introdotto le trasformazioni di Lorentz.

Ora a mio parere se le trasf. di Lorentz nella scuola secondaria non si nominano affatto, è meglio. Questo non vuol dire che un insegnante non le debba conoscere; ma dal punto di vista didattico sono una strada che crea più difficoltà di quante ne risolva. Arrivare all'invarianza del tempo proprio per via diretta è molto più sicuro, secondo me, che non arrivarci attraverso le trasformazioni di Lorentz. Io non mi preoccupo di spiegare come sono collegati tra loro i Δt, $\Delta t'$, Δx, $\Delta x'$ di due diversi rif., perché per le applicazioni che possiamo fare al livello che c'interessa quelle relazioni non servono. Vedrete che non ne avremo mai bisogno.

Analogamente, mentre non credo che nella fisica della s.s. sia necessario trattare esplicitamente di trasf. di coordinate (traslazioni e rotazioni di assi) penso però che l'idea che le equazioni della meccanica sono legate in qualche modo ai sistemi di coordinate (attraverso il carattere vettoriale di forze, velocità, ecc.) non andrebbe trascurata.

L'analogia che abbiamo vista funziona anche in questo senso: l'idea generale di una geometria dello spazio-tempo è più importante del dettaglio delle equazioni di trasformazione, cioè delle trasf. di Lorentz.

Tempo proprio in un moto qualunque

Prima di vedere perché quanto fatto fin qui spiega il risultato dell'esperimento H–K, occorre ancora un piccolo sforzo di generalizzazione. Finora abbiamo sempre usato la (8–2); ora conviene modificarla. Se v è la velocità dell'orologio a luce, sarà $\Delta x = v\Delta t$, per cui la (8–2) diventa

$$\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{8–6}$$

e infine

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Questa non è che la formula descritta in tutti i libri come "dilatazione del tempo." Ma anche di dilatazione del tempo e di contrazione delle lunghezze sarebbe bene non parlare. Vedremo infatti che si può andare avanti senza nominarle mai: servono solo a creare difficoltà non necessarie.

Ho scritto la (8–2) nella forma (8–6) perché ho bisogno di generalizzarla al caso di moti non uniformi. Finora abbiamo supposto che il nostro orologio a luce si muovesse, rispetto a un RI, di moto rettilineo uniforme. E se si muove di moto non uniforme, che cosa occorre cambiare?

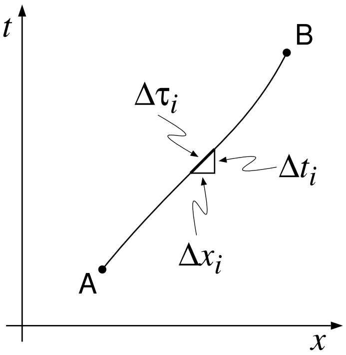


fig. 8–7

È chiaro che per un breve intervallo di tempo (fig. 8–7) si potrà ancora applicare la (8–6), usando naturalmente la velocità istantanea. Dopo di che, la sola cosa da fare è sommare tratto per tratto, ottenendo al limite un integrale. Avremo quindi

$$\Delta\tau = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} dt\,\sqrt{1 - v^2(t)/c^2}. \tag{8–7}$$

Questo è il tempo proprio segnato da un orologio che si muove di moto qualsiasi.

Non vi sarà sfuggito che finora ho usato solo la coordinata spaziale x, perché consideravo un moto rettilineo e non c'era necessità d'introdurre altre coordinate. Se il moto non è rettilineo, che cosa cambia? Penso di poter arrivare subito al risultato: il cambiamento è solo che nella (8–8) v^2 va inteso come il quadrato del modulo della velocità istantanea, cioè la somma dei quadrati delle componenti.

A dire il vero, quando si passa dal moto uniforme al moto qualsiasi c'è una differenza che non bisogna dimenticare: il moto qualsiasi può essere *accelerato* (di regola lo sarà) e perciò non possiamo essere sicuri che l'orologio si comporti come se l'accelerazione non ci fosse. Ma per fortuna la questione è stata già discussa, in parte poco sopra e in parte nella seconda lezione.

Per un orologio atomico, sappiamo che un'accelerazione avrà effetto trascurabile a meno che non sia veramente grande; d'altra parte un orologio atomico è solo una buona approssimazione di un orologio ideale, che caratterizzeremo in generale come quello che è *del tutto indipendente* dall'accelerazione. In concreto, se qualche esperimento comportasse un'accelerazione così grande da disturbare in modo sensibile anche gli orologi atomici, vuol dire che per quell'esperimento dovremmo usare qualcosa di meglio. Se un orologio migliore non fosse disponibile, dovremmo solo aspettare che venga inventato. . .

Ma l'importante è la nostra ipotesi teorica: in linea di principio non c'è un effetto dell'accelerazione su un orologio, che non sia eliminabile con soli accorgimenti sperimentali. E quindi senza influire sulla teoria.

Possiamo enunciare quest'idea in altro modo, introducendo il concetto di "RI tangente." Abbiamo un corpo in moto qualsiasi. Considerato un particolare istante t_0 del moto, il corpo ha una certa velocità istantanea $\vec{v}(t_0)$. Chiamo RI tangente a quel moto all'istante t_0 un RI che abbia la velocità *costante* $\vec{v}(t_0)$. Per definizione, il RI tangente a un moto non uniforme cambia da istante a istante; ma è ben definito a ciascun istante.

Ciò posto, l'ipotesi sul comportamento degli orologi è che l'orologio in moto qualsiasi ha lo stesso tempo proprio, intorno all'istante t_0, di un orologio fermo nel RI tangente al moto in t_0. Penso sia anche ovvio che questa definizione è solo per voi: non propongo certo di portarla in classe!

Il tempo proprio come "lunghezza" nello spazio-tempo

Ricordiamo ora che la lunghezza di una curva piana di equazione $y = y(x)$ è data dall'espressione

$$\Delta l = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} dx\,\sqrt{1 + y'(x)^2}. \qquad (8\text{–}8)$$

Si può arrivare a questo risultato pensando di suddividere la curva in tanti trattini che potremo approssimare con segmenti. Per la lunghezza Δl_i di uno di questi (fig. 8–8) vale

$$\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \Delta x_i \sqrt{1 + {y'_i}^2}$$

per cui la lunghezza totale della spezzata è data da

$$\Delta l = \sum \Delta x_i \sqrt{1 + {y'_i}^2}$$

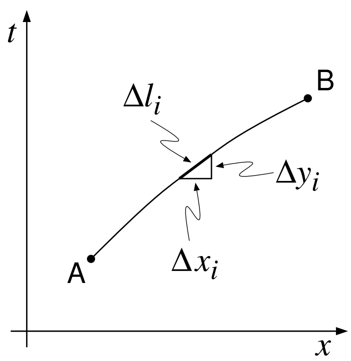


fig. 8–8

e al limite si avrà la (8–8).

Abbiamo a questo punto due espressioni che presentano, dal punto di vista formale, molte analogie: (8–7) e (8–8). La seconda permette il calcolo di un'invariante, che è la lunghezza di una curva, e che avrà dunque lo stesso valore quale che sia il sistema di coordinate. La prima permette il calcolo di un altro invariante: l'intervallo di tempo proprio, cioè l'intervallo di tempo segnato dall'orologio a luce. Anche $\Delta\tau$ deve risultare sempre lo stesso, qualunque sia il rif. in cui lo si calcola.

E ora un chiarimento importante. Noi abbiamo usato l'orologio a luce come esperimento ideale per definire il tempo proprio e per farne vedere l'invarianza, seguendo in questo una strada del tutto tradizionale. Il fatto che si sia usata la luce potrebbe indurre a credere che con ciò abbiamo dimostrato qualche proprietà dello spazio-tempo relativa però solo alla propagazione della luce: ma questo non è affatto vero, come ora vedremo meglio.

Riepiloghiamo sommariamente il ragionamento. Tenendo presente la solita fig. 8–2, e considerando la situazione nel riferimento in cui lo specchio cammina, abbiamo fatto partire la luce da L, riflettersi in S, arrivare in R; poi abbiamo ragionato sul Δx (lo spostamento dello specchio nel tempo che impiega la luce ad andare e tornare) e sul Δt (misurato con un orologio che è fermo in questo riferimento). Così siamo arrivati alla formula fondamentale (8–2).

Occorre mettere bene in evidenza che la (8–2) non si riferisce alla propagazione della luce: è la relazione che lega l'evento "emissione della luce in L" (chiamiamolo "evento L" per brevità) con l'evento R, che è il ritorno della luce. È vero che in questo caso i due eventi significano partenza e arrivo della luce, ma potrebbero riferirsi anche ad altre cose. Niente impedisce di concepire un esperimento nel quale una particella va da L a R in linea retta, nello stesso tempo che impiega la luce riflettendosi sullo specchio. In questo caso gli eventi L e R sarebbero partenza e arrivo della particella.

Quindi sebbene si usi la luce per arrivare alla relazione che c'interessa, ciò non significa che essa vale solo per la propagazione della luce. Quella che abbiamo trovato è una relazione tra la separazione spaziale dei due eventi L e R, la loro separazione temporale, e la loro "distanza," nel senso in cui il tempo proprio è una distanza nello spazio-tempo. Che poi quei due eventi siano l'emissione di un lampo di luce e la sua ricezione, oppure riguardino il moto di una particella che va da un posto all'altro dello spazio, o che si riferiscano ad altre cose ancora, a questo punto non ha più importanza. Siamo perfettamente autorizzati a usare la relazione dimenticando tutto il resto, cancellando lo specchio e ragionando soltanto sull'evento iniziale e sull'evento finale di un qualche fenomeno, che può essere — per esempio — il moto di una particella da L a R.

Del resto abbiamo già fatto uso, in maniera automatica, di questa universalità del nostro risultato, quando abbiamo generalizzato la (8–2) a un moto non uniforme, estendendo la definizione del tempo proprio al caso di un moto vario. Aggiungo che la validità universale del risultato (8–2) si ricava anche dal PR. Detto in modo un po' sbrigativo: se la relazione fra Δt e $\Delta\tau$ vale per un certo esperimento, deve valere per tutti gli esperimenti che connettono gli stessi eventi; altrimenti due fenomeni che hanno la stessa durata Δt in un certo rif. avrebbero durate $\Delta\tau$ diverse in un altro riferimento, e questo renderebbe i rif. non equivalenti.

È anche importante che alla (8–2) si arriva "giocando" solo con un raggio di luce e uno specchio, perché in tal modo ci si serve solo del fatto che la velocità della luce è la stessa in tutti i rif.: è l'unica informazione di cui disponiamo in partenza, e sfruttiamo quella; però una volta arrivati in fondo abbiamo un risultato la cui validità è indipendente dal particolare espediente adoperato per arrivarci.

Il paradosso dei gemelli

È ben noto che nella geometria euclidea tra tutte le curve che uniscono gli stessi due punti, il segmento di retta porta al minimo valore di Δl, che misura la distanza tra i due punti. Quando abbiamo a che fare con un diagramma spazio-tempo, l'arco di curva che unisce i due eventi A e B rappresenta la linea oraria di un moto per il quale A è l'evento *partenza* e B l'evento *arrivo*. Il segmento AB corrisponde a un moto uniforme. Si può dimostrare che (a causa del segno meno sotto radice) $\Delta\tau$ calcolato lungo il moto uniforme non è il minimo, bensì il *massimo* rispetto a quelli calcolati su tutte le altre curve (cioè su tutti gli altri moti possibili) fra gli stessi eventi A e B. Non darò la dimostrazione; come avvio suggerisco di verificare che fra tre punti la disuguaglianza triangolare vale al rovescio che nell'ordinaria geometria di uno spazio euclideo.

Questo risultato c'introduce al famoso *paradosso dei gemelli*. La retta tra A e B (fig. 8–9) rappresenta la linea oraria del gemello fermo a terra, mentre la curva è la linea oraria del secondo gemello. Per quanto detto sopra, $\Delta\tau_1$ ha il valore massimo; $\Delta\tau_2$, sempre minore di $\Delta\tau_1$, ha valori diversi a seconda della legge di moto del secondo gemello. Ciò risolve il paradosso, limitatamente al tempo segnato da un orologio a luce: effettivamente l'orologio in moto segnerà un tempo più breve. Tuttavia parlando d'invecchiamento dei gemelli noi pensiamo a qualcosa di diverso da un orologio; se si vuole, a un "orologio biologico." Sorge allora la domanda: possiamo essere certi che ciò che è vero per un orologio a luce sarà vero per tutti gli orologi, sia meccanici, sia biologici?

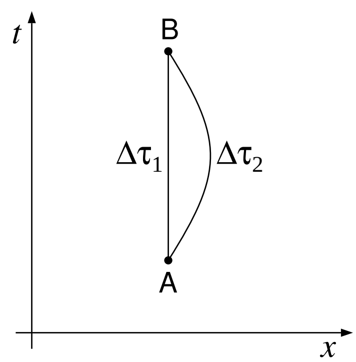


fig. 8–9

Se così non fosse, significherebbe che un orologio a luce e uno di tipo diverso — ad esempio biologico — regolati per andare d'accordo in un certo rif., segnerebbero tempi diversi in un rif. che si muove rispetto al primo. Questo permetterebbe d'identificare un rif. privilegiato, contro il PR. Supponiamo ad esempio che sulla Terra un orologio a luce, un orologio meccanico e uno biologico segnino lo stesso tempo; e che invece, posti su di un'astronave che viaggia a una certa velocità rispetto alla Terra, l'orologio meccanico o quello biologico non presentino, a differenza dell'orologio a luce, l'effetto "gemelli". Allora l'orologio a luce sull'astronave non andrebbe d'accordo con gli altri, e il loro confronto permetterebbe il calcolo della velocità dell'astronave rispetto al rif. terrestre.

Da Newton ad Einstein: breve commento

A questo punto cominciamo ad avere un'idea di che cosa si sia sostituito, nella concezione di Einstein, allo spazio e al tempo assoluti di Newton; è forse il momento d'introdurre qualche commento.

In primo luogo credo si possa dire che mentre per il tempo la rivoluzione è stata prodotta da Einstein, per quanto riguarda lo spazio è avvenuta in modo più graduale: man mano che si sviluppava la meccanica, si chiariva anche il significato della relatività galileiana. Infatti anche nella fisica newtoniana il moto relativo è il solo che conta; perciò, almeno nell'ambito della meccanica, lo spazio assoluto non significa più molto.

Però il problema è ritornato acuto alla fine del secolo scorso, con l'elettromagnetismo: lo spazio assoluto rinasceva quando si parlava di propagazione delle onde e.m. Quando si dice che la velocità delle onde e.m. è c, rispetto a che cosa va misurata questa velocità? Da qui nasce l'idea dell'etere, col che lo spazio assoluto viene concretizzato in un mezzo fisico: quel mezzo che vibra al passaggio delle onde e.m. In un tale ordine d'idee aveva senso dire che un oggetto è fermo rispetto all'etere.

A quel punto la situazione era un po' complessa: finché si parlava di meccanica, dello spazio assoluto si poteva farne a meno; però per le equazioni di Maxwell dello spazio assoluto c'era bisogno, perché occorreva precisare in quale sistema di riferimento erano valide.

Anche prima di Einstein cominciarono a nascere tentativi di soluzione, ad es. da parte di Lorentz: non a caso le trasf. di Lorentz si chiamano così. L'idea che almeno formalmente si potessero salvare le equazioni di Maxwell anche in altri RI era già nata prima di Einstein. Poincaré fa vedere che le equazioni di Maxwell sono invarianti rispetto alle trasf. di Lorentz: in questo senso non è più tanto chiaro se l'etere c'è o no. Credo però che a quel tempo si pensasse ancora che quelle trasf. erano solo formali, una proprietà matematica dello spazio assoluto e dell'etere, che restava il mezzo per la trasmissione delle onde. Sono stati poi i diversi esperimenti volti a verificare il moto della Terra rispetto all'etere, che hanno dato il colpo di grazia a questa concezione.

Perciò è difficile cercare un momento preciso in cui lo spazio assoluto cessa di esistere: certamente oggi la sola cosa di cui possiamo parlare è lo spazio-tempo. La questione ha avuto però una ripresa recente, quando sono cominciati gli esperimenti circa l'eventuale anisotropia della radiazione cosmica di fondo, la cui esistenza sembra ripristinare un sistema di riferimento privilegiato. Riprenderemo l'argomento quando avremo i mezzi per discuterlo adeguatamente.

Abbiamo ora tutto quanto occorre per spiegare quantitativamente l'esperimento H–K: ce ne occuperemo nella prossima lezione.

Problemi

1. Sono andato in autostrada da Pisa a Firenze, e ho fatto 50 sorpassi. Di quanto ho allungato il percorso?

2. Calcolare la lunghezza di 1° di parallelo a Siracusa e a Bolzano e valutarne la differenza.

3. Quale sarebbe il risultato di un esperimento di redshift gravitazionale in un satellite in orbita?

4. Stimare l'effetto gemelli in un viaggio di andata e ritorno da Pisa a Firenze in autostrada.

5. Dimostrare che nello spazio-tempo la disuguaglianza triangolare vale in senso opposto che nella geometria euclidea.

Discussione dei problemi

Problema 1. (Sorpassi in autostrada):

I: Il problema si può schematizzare come in fig. 8–10 (ovviamente il rientro in corsia di marcia è simmetrico). Indico con a la larghezza di una corsia, con l il tratto realmente percorso dall'automobile, con d il tratto di autostrada percorso.

Dal teorema di Pitagora:

$$d = \sqrt{l^2 - a^2} = l\,\sqrt{1 - a^2/l^2} = l\,\sqrt{1 - v_t^2/v^2}$$

dove v_t è la velocità trasversale e v la velocità dell'automobile. Se v fosse la velocità della luce si avrebbe qualcosa di simile alla contrazione di Lorentz.

F: Perché volere per forza far venire una formula analoga a quelle della relatività? Non era questo lo scopo del problema: si chiede un risultato numerico concreto... Inoltre non torna bene, perché questa è geometria euclidea. Io avrei scritto $l = d\sqrt{1 + a^2/d^2}$.

I: Venendo ai numeri, vediamo la stima di l. Si può supporre che tutti i sorpassi vengano fatti con la stessa velocità trasversale, anche se la schematizzazione è grossolana. Si può pensare che sia costante il rapporto, cioè anche variando la velocità dell'auto io faccio sempre lo stesso angolo nell'iniziare il sorpasso (e nel rientro). Per la valutazione di d, penso si debba tener conto della distanza di sicurezza fra i veicoli, e quindi conta la velocità relativa dei due mezzi (chi sorpassa e chi è sorpassato) ed eventualmente anche i tempi di reazione.

F: Non sono molto convinto di tutto questo. Ciò che conta è v_t e quindi lo stile di guida: se io esco bruscamente dalla mia corsia oppure lentamente. Se uno davanti a me va piano io uscirò prima, non più rapidamente. Perché devo cambiare il mio stile di guida?

Per arrivare a un numero occorre dare una stima delle grandezze in gioco. È vero che nessuno fa sorpassi tutti uguali, ma lo scopo del problema è quello di calcolare di quanto in realtà si allunga il tragitto: se sono metri, chilometri o altro.

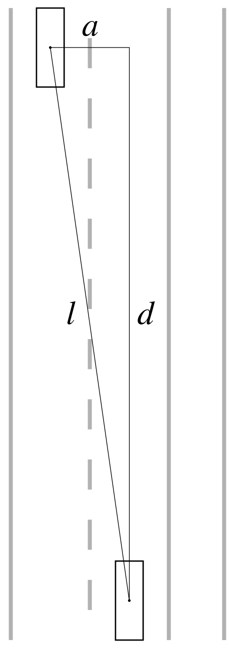


fig. 8–10

I: Io avevo fatto i calcoli con la mia distanza di sicurezza ed avevo trovato che si otteneva un allungamento di 10 metri in tutto, ammettendo di aver fatto 50 sorpassi.

F: Sono cento triangoli fra uscita ed entrata quindi ognuno contribuisce per 10 centimetri.

Altro intervento: Io avevo ottenuto 150 metri facendo ipotesi diverse: ipotizzando un angolo di uscita di 30°.

F (e altri): Ritengo poco probabile un angolo di 30°: a 80 km/h significa una velocità trasversale di 40 km/h; se la larghezza della corsia è 4 metri, il cambio di corsia viene fatto in meno di mezzo secondo... Comunque quanto veniva il rapporto v_t/v?

I: Non avevo proprio calcolato v_t/v ma altre cose; ma all'incirca veniva 1 m/s rispetto a 33 m/s quindi un rapporto 1/33. Inoltre avevo fatto calcoli per trovare formule per la distanza di sicurezza ... il rapporto dipende dalla distanza di sicurezza.

F: Io avevo dato questo problema per far vedere che se in 100 km con i sorpassi allungo di 10 metri, il contachilometri non se ne accorge. Analogamente nello spazio-tempo: se la velocità del corpo è piccola rispetto a quella della luce, nella formula del tempo proprio il termine che darebbe la correzione relativistica è piccolissimo. Questo spiega come mai nella fisica fino a questi tempi non abbiamo avuto bisogno di preoccuparci, con gli orologi che avevamo a disposizione, che la lunghezza della curva oraria e quindi la misura del tempo proprio dipende dal percorso, e non solo dagli estremi. Nel caso Pisa-Firenze le variazioni di lunghezza sono tranquillamente trascurabili.

I: Io avevo fatto una cosa molto più brutale: avevo considerato la lunghezza minima (senza sorpassi) e quella massima considerando lo spostamento di corsia ad angolo retto. Anche in questo caso l'allungamento sarebbe valutabile in 500 metri. Con dati diversi sulla corsia (2.5 m) l'allungamento veniva 62.5 cm quindi molto poco.

F: Si può osservare che il termine v_{t}/v è molto minore di 1, per cui si può sviluppare in serie, ottenendo

$$d \simeq l\left(1 - \frac{a^2}{2l^2}\right) \qquad l - d = \frac{a^2}{2l}.$$

Problema 2. (Grado di parallelo):

F: Supponiamo che all'ingrosso il raggio equatoriale della Terra sia 6400 km; come latitudine di Siracusa prendiamo 36°, per Bolzano 46.5°. Allora 1° all'equatore è $6400 \cdot 2\pi/360 = 111.7\,\mathrm{km}$.

Invece 1° a Siracusa è lungo

$$111.7 \times \cos 36° = 90.4\,\mathrm{km}$$

e a Bolzano

$$111.7 \times \cos 46.5° = 76.9\,\mathrm{km}.$$

La differenza è di 13.5 km: come vedete è notevole. La prossima volta vedremo a che cosa serviva calcolarla.

Problema 3. (Redshift gravitazionale in orbita):

I: Partiamo dalla formuletta della volta scorsa per il redshift: h è l'altezza della cabina dove devo fare l'esperimento. Questo è un rif. localmente inerziale: se non vi fosse gravità non vi sarebbe redshift; ma tra pavimento e soffitto vi è un residuo di gravità che ottengo differenziando g:

$$g = -\frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad dg = \frac{2GM}{R^3}\,dR.$$

Poiché sono in un rif. in caduta libera, se g ad es. è zero sul pavimento, sul soffitto ottengo $2GMh/R^3$.

F: Voglio sentire qualche obiezione, in particolare sulla sostituzione di dR con h. Io ho un satellite in caduta libera: il suo baricentro (supponiamo il centro) ha gravità 0. Cosa succede se mi metto in A o in B (fig. 8–11) o in un punto intermedio?

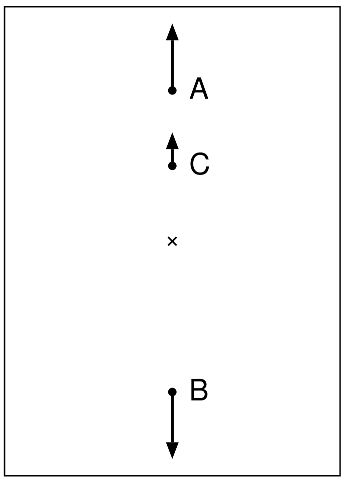


fig. 8–11

I: In A avrò $(0 + dg) = GMh/R^3$ e in B

$$(0 - dg) = -GMh/R^3;$$

in C, $(0 + dg/2)$, ecc.

F: Quindi rispetto allo stesso esperimento sulla terra c'è una differenza importante: il campo gravitazionale non è uniforme, addirittura cambia verso passando per il centro.

I: Ma se io considero 0 in basso e dg in alto ...

F: Però il campo cambia lo stesso ...

I: Ma in prima approssimazione io prendo il valore medio ...

F: Lo zero del campo gravitazionale non è una convenzione che si prende dove pare a noi, come si fa per il potenziale: lo zero si trova nel centro del satellite. Abbiamo un campo gravitazionale che cresce man mano che mi allontano dal centro. Una pallina in B si sposterà verso il basso; una in A si muoverà verso l'alto. Potrei prendere il valor medio, ma in questo caso è zero; avrò un effetto di un segno mentre vado dalla base al centro e un effetto contrario dal centro al soffitto.

Anzi, l'osservazione del potenziale mi porta a dire un'altra cosa che avevo tralasciata: gh come lo posso chiamare? È la differenza di potenziale gravitazionale tra i due punti che si vanno a considerare, fra trasmettitore e ricevitore. E quindi si può dimostrare che l'effetto di redshift dipende dalla differenza di potenziale gravitazionale tra i punti di partenza e arrivo.

Se noi poniamo un sistema di coordinate con 0 nel centro e z verso l'alto, sostituendo dR con z posso ricavarmi il potenziale, integrando. Cosa troverò calcolando il potenziale in B e in A? Basta fare l'integrale e si ottiene GMz^2/R^3.

Se calcolo la differenza fra il potenziale in A e in B ottengo 0, perché c'è z^2 (pari). Quindi se metto il trasmettitore sul pavimento e il ricevitore sul soffitto non vedo niente, perché ho una variazione di frequenza di un segno nella prima parte del percorso ed una di segno contrario nella seconda parte. Se invece metto un trasmettitore nel centro e un ricevitore sul soffitto, l'effetto c'è.

Calcoliamoci la differenza di potenziale: otteniamo $GMh^2/4R^3$ (la distanza è $h/2$). Questo lo si sostituisce al posto di gh nella formula del redshift e si trova

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{GM\,h^2}{4c^2R^3} = \frac{g\,h^2}{4c^2R} = \frac{gh}{c^2}\,\frac{h}{4R}.$$

Il primo fattore è come quello sulla Terra, e il secondo è dell'ordine di 10^{-6}. Quindi in linea di principio l'effetto c'è anche su un satellite, ma è molto più piccolo.

Conclusione: l'esperimento si può fare, ma invece che 10^{-16} per metro come sulla Terra avremo un effetto dell'ordine di 10^{-22} e questo non lo possiamo vedere, perché non abbiamo strumenti di sensibilità sufficiente. Si spiega quindi che l'esperimento non sia ancora stato fatto, e forse neppure pensato.

Comunque vedrete che ci servirà il risultato qualitativo: l'osservazione che un effetto di redshift, per quanto piccolo, c'è sempre: la gravità non si può eliminare completamente.

Problema 4. (Effetto gemelli da Pisa a Firenze):

F: Qualcuno ha provato a fare il conto?

Voci: Supponendo $v = 60\,\mathrm{km/h}$ viene $\Delta\tau = 10^{-12}\,\mathrm{s}$.

F: Fatemi fare alcune osservazioni a carattere generale — o didattico, se preferite. La risoluzione di questo problema è banale, perché è solo necessario applicare delle formule e sostituire i numeri; ma è importante che si acquisti familiarità con gli ordini di grandezza, perché a volte un risultato è piccolo ma osservabile e misurabile, mentre a volte è piccolo e non misurabile, come in questi ultimi due casi.

Un secondo aspetto riguarda il prendere pratica su come fare questi conti. Anche se richiedono solo di applicare una formuletta, hanno un carattere un po' nuovo, chi non li abbia mai visti deve imparare come farli. Non si devono dare solo questi problemi, perché sarebbe fare della fisica stupida, ma si devono fare anche questi, perché solo se si ha familiarità con conti del genere si possono fare ragionamenti più sofisticati e affrontare problemi più sofisticati.

Problema 5. (Disuguaglianza triangolare):

Va detto anzitutto che l'enunciato del problema non è preciso. Bisognava dire:

"Se A, B, C sono tre punti dello spazio-tempo, disposti in modo che i tre segmenti AB, BC, AC rappresentano moti uniformi con velocità minore di c (quelli che brevemente si chiamano 'vettori di tipo tempo') allora

$$\Delta\tau_{\mathrm{AB}} + \Delta\tau_{\mathrm{BC}} \le \Delta\tau_{\mathrm{AC}} \tag{8–9}$$

e il segno $=$ vale se e solo se B appartiene ad AC."

Dato che i due membri della (8–9) sono entrambi positivi, dimostrare la (8–9) equivale a dimostrare quella che ottiene innalzando a quadrato:

$$\Delta\tau_{\mathrm{AB}}^2 + \Delta\tau_{\mathrm{BC}}^2 + 2\,\Delta\tau_{\mathrm{AB}}\,\Delta\tau_{\mathrm{BC}} \le \Delta\tau_{\mathrm{AC}}^2$$

ossia, usando la definizione (8–2) del tempo proprio

$$(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})^2 - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})^2 - (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}})^2 + 2\,\Delta\tau_{\mathrm{AB}}\,\Delta\tau_{\mathrm{BC}} \le \\ (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}})^2 - (x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{A}})^2.$$

Questa si semplifica tenendo conto che

$$t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{A}} = (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}}) + (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})$$

e analoga per le x. Si arriva a

$$\Delta\tau_{\mathrm{AB}}\,\Delta\tau_{\mathrm{BC}} \le (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}}) - (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}).$$

È di nuovo lecito innalzare a quadrato, poiché entrambi i membri sono positivi, e semplificando si trova

$$(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})^2\,(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})^2 + (t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})^2\,(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}})^2 \ge \\ 2\,(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}). \tag{8–10}$$

La (8–10) è sempre soddisfatta, e il segno $=$ si ha se e solo se

$$(t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}})(x_{\mathrm{C}} - x_{\mathrm{B}}) = (t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})(x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})$$

ossia se e solo se i tre punti A, B, C sono allineati, e disposti in quest'ordine.

LEZIONE 9

Spiegazione dell'esperimento H–K

Abbiamo ormai preparato il terreno, e possiamo procedere a spiegare quantitativamente (entro i limiti dovuti alle nostre semplificazioni) il risultato dell'esperimento H–K. Indicherò con Δt il tempo (segnato da un orologio fermo nel RI che si muove con la Terra) in cui ha avuto luogo l'esperimento. Sappiamo che $\Delta t \simeq 50\,\text{ore} = 1.8 \cdot 10^5\,\text{s}$.

Sia poi u la velocità della Terra all'equatore; v quella degli aerei rispetto alla Terra. Abbiamo

$$u = \omega R = 465\,\text{m/s}, \qquad v = 2\pi R/\Delta t = 222\,\text{m/s}.$$

Le velocità dei due aerei rispetto al rif. K sono risp. $u+v$ e $u-v$, da cui:

$$\Delta\tau_{1,2} = \Delta t\,\sqrt{1-(u \pm v)^2/c^2}.$$

E ora provate a calcolarlo: chi ha un calcolatorino, provi a mettere i numeri nella formula, e mi dica che cosa trova...

C'è una ragione per cui ho chiesto di fare questo conto. Il fattore che moltiplica Δt è talmente vicino a 1 che la differenza non è visibile, se il vostro visore ha 8 o 9 cifre (e anche un po' di più ...). A prima vista si sarebbe quindi portati a dire che la differenza fra $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$ è zero, cosa certamente falsa; in seconda battuta, si dirà che il calcolatore non è in grado di calcolarla...

A dire il vero, il fatto che non compare non significa che il calcolatore non sia in grado di tenerne conto: il numero di cifre con cui sono rappresentati internamente i numeri può essere (di solito è) superiore a quelle che vengono mostrate. Se però il vostro calcolatore non lavora con almeno 13 cifre significative, non c'è speranza di vedere un risultato.

C'è un modo assai semplice per verificare se le cose stanno così: se sul display, quando calcolate la radice quadrata, vedete un semplice 1, provate a sottrarre 1. Se il risultato è proprio 0, niente da fare; ma può darsi che la differenza venga diversa da 0, e questo mostra che il risultato era rappresentato internamente con più cifre di quante ne vengono mostrate; anche se non ci dà nessuna garanzia che il risultato stesso sia affidabile.

Ritengo molto istruttivo far "toccare con mano" questo fatto ai ragazzi. Ma una volta scoperto che non si può affidare così semplicemente il calcolo alla nostra macchinetta, bisogna trovare un altro modo di arrivare in fondo. Una soluzione è sviluppare in serie:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \cdots$$

Nel nostro caso x è dell'ordine di 10^{-12}, x^2 è dell'ordine di 10^{-24} e lo trascuriamo, quindi otteniamo:

$$\Delta\tau_{1,2} = \Delta t \left(1 - \frac{(u \pm v)^2}{2c^2}\right)$$

$$\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = \Delta t\,\frac{2uv}{c^2} = 4 \cdot 10^{-7}\,\text{s}. \tag{9–1}$$

Osservate che la differenza dei tempi contiene il prodotto delle velocità (della Terra e dell'aereo) diviso c^2. Questo è un numero piccolo, ma moltiplicato per Δt che è dell'ordine di 10^5 s produce un risultato di $0.4\,\mu$s, che è misurabile.

Non c'è da meravigliarsi se non torna l'esatta differenza dell'esperimento (332 ns) perché occorrerebbe avere i dati esatti della traiettoria, delle velocità, ecc. Però l'ordine di grandezza è quello giusto, il che rende plausibile che un calcolo più accurato possa dare un accordo migliore, come infatti è stato; entro 20 ns dovuti alle varie cause di errore.

Si potrebbe obiettare che che nella (9–1) è rimasto Δt, e noi non abbiamo l'orologio fermo nel centro della Terra. Però i tempi dei vari orologi differiscono solo nella tredicesima cifra, per cui al posto di Δt potete mettere il tempo segnato da un orologio in qualunque posto sulla Terra.

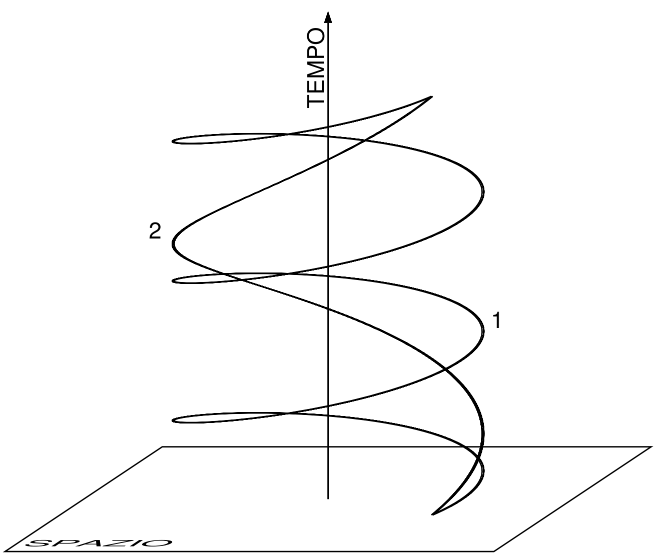


fig. 9–1

Conclusione: è giusto che gli orologi 1 e 2 segnino tempi diversi, come mostra l'esperimento.

Notate che abbiamo di nuovo a che fare con due percorsi nello spazio-tempo. In fig. 9–1 è rappresentata la situazione, che è complicata dalla necessità di rappresentare *due* dimensioni spaziali, perché il moto degli aerei si svolge lungo l'equatore. Come al solito, ho disposto il tempo in verticale; allora un moto circolare uniforme mi dà come curva oraria un'elica che si sviluppa lungo l'asse t. Moto più veloce significa elica di passo più breve (ci vuole meno tempo per fare un giro). Le due eliche partono dallo stesso punto (evento "partenza degli aerei") e terminano ancora in uno stesso punto (evento "arrivo degli aerei").

La curva 1, che sembra più lunga, è in realtà più breve, per effetto di quel segno meno nella formula; quindi l'orologio 1 segna un tempo inferiore all'orologio 2, come si vede dai calcoli. E questo è tutto per l'esperimento H–K.

Faccio notare che non abbiamo parlato affatto di dilatazione del tempo, ma solo e sempre di tempo proprio. C'è un orologio che si muove: il tempo che quell'orologio segna è legato al tempo del laboratorio e al moto dell'orologio stesso dalla formula (8–8).

Vita media dei muoni in un anello di accumulazione

Voglio ora rinforzare l'argomento che abbiamo trattato. Non introdurrò cose nuove, anzi parlerò di esperimenti più vecchi di quelli presentati fino ad ora. Però è interessante far vedere come li si può spiegare seguendo la linea che vi ho illustrata, invece che secondo la linea tradizionale.

Mi riferisco a esperimenti che vengono presentati come esempi della "dilatazione relativistica del tempo," e riguardano la vita media dei muoni. Ce ne sono almeno due versioni: la più vecchia è quella che appare anche in un film PSSC, e la tratteremo per seconda; la prima, più recente, è stata eseguita con muoni raccolti in un anello di accumulazione.

Per chi non ne fosse a conoscenza, ecco una breve descrizione dei muoni (il minimo che serve). Il muone è un leptone, ossia una particella che sente solo l'interazione debole (oltre quella elettromagnetica, visto che è carico). Sono in questo analoghi agli elettroni. La massa del muone è circa 206 volte quella dell'elettrone. Però il μ è instabile e decade, con vita media $\tau \simeq 2\,\mu\mathrm{s}$, col processo:

$$\mu^- \to e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_\mathrm{e}.$$

Ecco ora l'esperimento con l'anello di accumulazione. Dei muoni di grande energia vengono posti in un anello di accumulazione, dove si muovono a velocità molto alta, vicina a c (pessimo modo di esprimersi, perché non diciamo *quanto* è vicina a c, mentre gli effetti relativistici, a causa del fattore $\sqrt{1-v^2/c^2}$, cambiano molto proprio in vicinanza di c). I muoni rimangono nell'anello un tempo sufficientemente lungo per poterne vedere il decadimento: misurando come varia il loro numero nel tempo, si può calcolare la vita media.

Si trova che la vita media è più lunga di quella a riposo: $\tau' \gg \tau$, per un fattore chiamato universalmente γ, dato da

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

che nell'esperimento era circa 12. Quindi la vita media si allunga di un ordine di grandezza.

Come si spiega questo fatto? La spiegazione tradizionale è che si tratta di un classico esempio di dilatazione del tempo: un orologio che cammina va più lento di un orologio fermo. Ma questo approccio è pericoloso: la dilatazione del tempo è una delle cose che creano confusione perché non si capisce mai bene se si tratta di un effetto oggettivo o soggettivo, se l'orologio che cammina va realmente più lento oppure no, se vale ancora il PR. Se lui si muove rispetto a me io mi muovo rispetto a lui, quindi per lui il mio orologio va più piano: come possono accadere entrambe le cose? Quindi ci si perde in disquisizioni dove la fisica finisce per uscire di scena, e con poco costrutto. Credo che il timore di cadere in tali difficoltà sia una remora non trascurabile ad affrontare la relatività.

È dunque meglio guardare la questione da un altro punto di vista; infatti per spiegare ciò che si vede nell'esperimento, non c'è bisogno di parlare di dilatazione del tempo. Come si fa?

Ricordo che quando si parla di vita media dei muoni ci si riferisce a una legge di decadimento analoga a quella dei nuclei radioattivi: una legge esponenziale. Vita media τ significa che al tempo τ solo una frazione $1/e$ dei muoni sopravvive, gli altri sono decaduti. Perciò per misurare la vita media si procede così: si comincia con un certo numero di particelle, e si va a vedere quante ne sono rimaste dopo un dato tempo.

La domanda cruciale è: tempo di chi? Il tempo che io misuro è quello del laboratorio, ma i muoni in questo rif. sono in moto. D'altra parte stiamo parlando di una proprietà della particella, la sua vita media, alla quale dovremo attribuire un determinato valore come facciamo con la massa, la carica, ecc. Tale proprietà dovrà essere misurata in un rif. in cui la particella è ferma. In altre parole, la vita media va misurata col *tempo proprio* della particella. Se sto nel mio laboratorio, è ovvio che misuro un'altra cosa. Se il muone è fermo, il tempo proprio coincide con quello del laboratorio; ma se è in movimento il tempo proprio sarà:

$$\Delta\tau = \Delta t\,\sqrt{1-v^2/c^2}$$

che è diverso da Δt: più esattamente, è minore.

Possiamo vedere la cosa graficamente, disegnando la curva oraria del muone (fig. 9–2). Il segmento AB rappresenterebbe un muone fermo, mentre la curva oraria del muone in movimento dentro l'anello è un'elica. Come

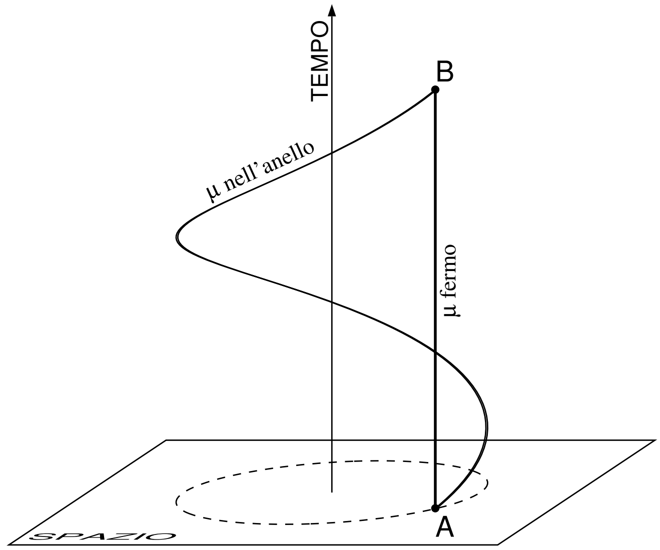


fig. 9–2

sappiamo, a parità di estremi il tratto rettilineo è più lungo dell'arco di curva; quindi nel punto B per il muone fermo è passato più tempo che per il muone in moto. Tra i due è più probabile che sia decaduto il primo, mentre quello in moto, che ha vissuto meno, è meno probabile che sia decaduto. Perciò per gli strumenti del laboratorio i muoni in movimento sembrano avere una vita media maggiore dei muoni fermi. È tutto.

Bisogna sempre saper confrontare le cose che si misurano con le grandezze che compaiono nelle formule. Nel nostro caso, supponiamo di aver fatto l'esperimento con 1000 muoni fermi e con 1000 muoni in movimento: li contiamo all'inizio e alla fine. Lo studio delle curve orarie ci dice che la linea oraria dei muoni fermi, la retta tra A e B, è più lunga: quindi per loro è passato più tempo ed è naturale che siano decaduti in numero maggiore rispetto a quelli che hanno percorso la linea oraria ad elica, più breve. La formula dà solo carattere quantitativo al confronto, e quindi ci permette di calcolare il rapporto delle due vite medie.

Come vedete, tutto si basa sul fatto che le linee orarie hanno lunghezza diversa. Abbiamo quindi sostituito alla dilatazione del tempo il fatto che il tempo proprio è una grandezza che dipende dalla linea oraria percorsa: è la lunghezza di quella curva oraria.

È davvero difficile la geometria dello spazio-tempo?

Un'obiezione che mi sento fare spesso è che per ragionare così bisogna introdurre una metrica insolita, la geometria dello spazio-tempo, che presenta difficoltà.

A tale obiezione rispondo anzitutto che voi insegnate cose ben più difficili di queste; la differenza è che ci siete abituati e non vedete le difficoltà. In questo nuovo modo d'insegnare la relatività, la difficoltà è più vostra che degli studenti, perché voi siete stati abituati a pensare in un certo modo e vi è difficile cambiare ora. Ma non dovete inferire da questa vostra difficoltà che ci sia un'analoga difficoltà per gli studenti: essi, dovendo partire da zero, non hanno pregiudizi.

Viceversa la dilatazione del tempo rischia sempre di creare confusioni. E non mi riferisco solo alla s.s.s.; penso anche all'università, dove ho una larga esperienza. Se non si hanno idee più che chiare su come giocano i diversi rif., ci si confonde e non si raggiungono conoscenze stabili.

È difficile fare discorsi corretti sulla base della dilatazione. Non è impossibile, ma bisogna sempre tener presente che in un rif. c'è qualcosa che si muove e qualcosa che sta fermo, e si ha un certo fenomeno; poi bisogna dire cosa succede se ci si scambiano i ruoli, e bisogna saperlo dire correttamente e con chiarezza.

Con l'approccio che vi propongo invece non c'è nessun problema: mi metto nel RI del laboratorio e calcolo tutto in quel rif. Si vede subito che non c'è simmetria con l'oggetto in moto, perché il rif. ad esso solidale (ad esempio il rif. del muone) non è inerziale. Quindi nessun paradosso. Del resto, abbiamo solo realizzato una "versione per muoni" del paradosso dei gemelli.

D: Può darsi che queste difficoltà nella dilatazione del tempo derivino dal fatto che non si usano le trasformazioni di Lorentz? Lei all'inizio ha detto che le trasf. di Lorentz sarebbe bene lasciarle perdere, ma tutto questo ne viene fuori quasi logicamente. Le trasf. di Lorentz non sono poi la fine del mondo. Io vedo molto problematico procedere per la strada che lei dice, per la definizione del campo elettrico, per la legge di Coulomb e cose di questo genere... Rinunciare alle trasf. di Lorentz l'ho sempre visto con sospetto.

F: Posso dare diverse risposte, ma per prima mi viene in mente questa: vorrei che voi poteste prendere contatto coi ragazzi che hanno preso la maturità, e non stanno studiando fisica; dopo un anno chiedete a loro cosa gli è rimasto in testa di tutto quello che hanno studiato! In particolare di fisica: e in particolare se gli avete fatto le trasf. di Lorentz. Croce diceva che la cultura è ciò che rimane dopo che si è dimenticato tutto... Dovreste verificare quale "cultura" ha prodotto la relatività fatta a base di trasf. di Lorentz.

I: Sì ma con la matematica, se è vero che i passaggi matematici si dimenticano facilmente, il senso della relatività rimarrebbe, se si potesse fare un corso di quattro o cinque mesi...

F: Su questo argomento sono di parere diametralmente opposto! Se c'è una cosa che non solo gli studenti di Liceo, ma anche quelli dell'università, dopo finiti gli studi, spesso non hanno capito e quindi non conservano, è proprio il senso di quello che hanno fatto. Si sono immersi in un formalismo e dentro la formula hanno smarrito il senso di quello che stavano facendo. Una riprova, e parlo di studenti universitari, è che se gli si dà un problema dove c'è da applicare formule lo risolvono; se viceversa gli si chiede di applicare le formule che conoscono ma in un contesto diverso ... finito. Le formule le sanno, ma se le devono usare in applicazioni nuove... È proprio il senso che non c'è: rimane solo uno strumento matematico senza scopo.

Questa è la mia esperienza. Tra coloro che si occupano di didattica della fisica c'è una corrente — per ora ampiamente minoritaria — che sostiene la relatività spiegata come vi sto dicendo; ogni volta che ci s'incontra sorgono ampi dibattiti sull'impostazione e sui problemi che emergono, il che almeno dimostra che il problema è tutt'altro che risolto.

C'è una cosa che molti non vogliono riconoscere: che tutta la didattica della relatività fatta fino ad ora è fallimentare, a tutti i livelli, anche universitari. Tutti, anche tra voi, l'hanno studiata (voi siete quasi tutti fisici). Ma nella mia lunga carriera universitaria ho riscontrato che: per la struttura della materia la relatività non serve quasi mai; per la fisica sperimentale delle alte energie servono solo alcune formule (per i calcoli ci sono programmi già pronti). Resterebbero i teorici, ma i loro problemi sono a livello di complicazione tale che la relatività di cui ci stiamo occupando è troppo banale perché possa riguardarli. Il solo ambito di ricerca dove la relatività entra nei suoi fondamenti è la cosmologia; ma la gente che si occupa di cosmologia è poca, e quei pochi hanno altri problemi... Il risultato è che la comprensione della relatività non è argomento di studio e approfondimento per la gran parte dei fisici.

A livello di s.s.s. poi, i pochi tentativi fatti hanno dato qualche risultato interessante, ma solo perché si trattava di una cosa nuova, e una novità attira l'attenzione e stimola solo per questo gli allievi; ma non hanno dato risultati affidabili nel tempo. Un test lì per lì sembra positivo, i risultati matematici si possono anche ottenere, ma poi ... se approfondite, se chiedete dove entra una certa ipotesi ... buio.

Il mio tentativo è di basarsi su fatti sperimentali. Osservate che ho particolarmente insistito su questi: sugli strumenti attuali che permettono misure impossibili fino a poco tempo fa; sull'ordine di grandezza di certi effetti... Di tutto ciò non c'è traccia nell'insegnamento tradizionale, perché non c'è l'attenzione a prendere contatto con la fisica del fenomeno. Ci si sbriga dicendo che le trasformazioni galileiane non sono più vere vicino alla velocità della luce e si sostituiscono con le formule di Lorentz; da queste si pretende di dedurre tutto. Questo è vero ed anche bello per chi ha considerevole padronanza con lo strumento matematico, che può allora essere un aiuto al ragionamento; ma non è vero né bello per il 99% degli studenti.

Per la grandissima parte degli studenti, aggiungere strumenti matematici significa solo complicargli la vita, a scapito della comprensione. Peggio: significa convincerli che con la matematica si fa tutto. Mentre questa è fisica: la matematica va usata solo per l'indispensabile e nella forma indispensabile. La geometria dello spazio-tempo è la vera matematica necessaria nel nostro caso. La realtà è così.

Avete insegnato la geometria euclidea per studiare determinate cose; dite che il Teorema di Pitagora è utile, perché? Perché per l'ambito dei fenomeni che osservate va bene. Ora ci troviamo in un ambito di fenomeni diversi, nel quale occorre utilizzare una matematica diversa. Non si può sfuggire. Il resto sono sovrastrutture, più o meno utili o facili, ma che rischiano di nascondere la sostanza della questione.

Faccio un esempio pertinente: si potrebbe insegnare la geometria euclidea alla rovescia? Cioè partire col piano cartesiano, definire astrattamente una distanza e da lì ricavarsi tutta la geometria euclidea che si studia nella scuola? Qualcuno lo propone?

Sarebbe capovolgere la cultura: la storia non è andata così, l'interpretazione primaria della realtà è partita dalla geometria euclidea, e solo nel 17-mo secolo si è cominciato ad algebrizzare il tutto. Non a caso questo è stato lo sviluppo storico: infatti la geometria analitica è utile e comoda in molti casi, ma non sempre; non si può o non è opportuno fare tutto con la geometria analitica.

Su questo argomento delle geometria euclidea ho un esempio fresco fresco che ho incontrato in un'area di discussione in Internet.

Problema:

Si consideri un triangolo qualsiasi, e due generici segmenti uscenti da due vertici, come in fig. 9–3. Note le aree dei triangoli che si formano (ad es. 5, 10, 8) determinare l'area della parte rimanente del triangolo.

Ho visto uno che per risolverlo ha fatto molti conti e molti passaggi; ha usato la trigonometria e la geometria analitica... E siccome ha fatto molti conti, ha anche sbagliato. Volendo si può fare con la trigonometria o con la geometria analitica, ma sono strade complicate e pericolose per la facilità di errori. C'è invece una soluzione sintetica molto semplice: trovatela da soli.

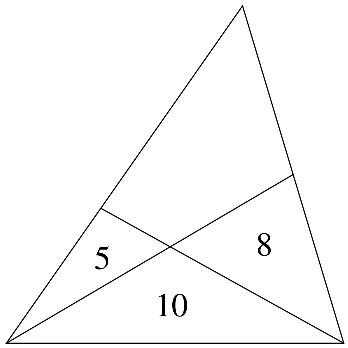


fig. 9–3

Muoni dai raggi cosmici

Questo è ancora un esperimento sui muoni, che però utilizza quelli naturali, prodotti dai raggi cosmici. È l'esperimento descritto nel film PSSC *La dilatazione del tempo*. Si misura il numero N_0 di muoni che ad alta quota, all'altezza h, attraversano verticalmente, in un certo tempo, una certa superficie; poi si misura quanti ne arrivano al suolo (N) nello stesso tempo e su una superficie uguale.

Si suppone ovviamente che la pioggia di muoni sia uniforme, sia nel tempo, sia nello spazio. Inoltre si suppone che sia trascurabile l'interazione dei muoni con l'atmosfera. Questo non è proprio vero, ma il numero di muoni che si perdono per tale ragione è comunque piccolo. Si vede che $N < N_0$, il che si spiega, perché ci aspettiamo che un certo numero di muoni decadano "in volo."

I muoni in questione hanno velocità molto vicina a c; quindi per giungere a terra dalla cima della montagna impiegano un tempo $t = h/c$. Coi dati dell'esperimento ($h = 1800\,\mathrm{m}$) si trova $t = 6\,\mu\mathrm{s}$, circa tre volte la vita media; quindi al livello del mare ne dovrebbero arrivare pochissimi. Invece il numero al suolo è ben superiore al previsto, il che può essere interpretato dicendo che la vita media dei muoni in volo è molto maggiore di $2\,\mu\mathrm{s}$. Pertanto questo è il classico caso in cui si può parlare di dilatazione del tempo.

Se invece non vogliamo usare tale idea, come possiamo interpretare il risultato? Dato che noi vogliamo ricondurre tutto alla geometria dello spazio-tempo e alle lunghezze delle curve, dovremo anzitutto identificare due orologi diversi, le cui curve orarie hanno lunghezze diverse. La situazione è rappresentata in fig. 9–4, dove ho riportato il tempo in ascissa e la coordinata spaziale (quota) in ordinata, perché così si resta più vicini alla disposizione sperimentale.

Se prendiamo le unità di misura in modo che la propagazione della luce sia descritta da una retta con pendenza di 45°, la pendenza della linea oraria dei muoni sarà un po' meno di 45°. Il muone parte dalla cima della montagna (A) e giunge a terra (C) seguendo quella linea oraria: il suo tempo proprio è la lunghezza della linea AC. Dovrò confrontarlo col tempo di un orologio fermo nel laboratorio, che è rappresentato da una linea oraria orizzontale BC.

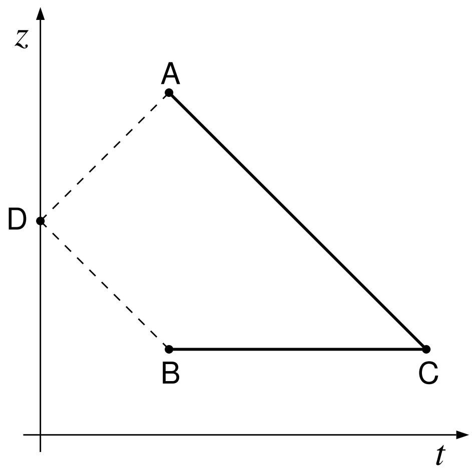


fig. 9–4

Si vede dalla figura che le due linee orarie arrivano nello stesso punto, ma non partono dallo stesso punto: l'orologio è fermo nel laboratorio, mentre il muone parte dalla cima del monte. Perciò il confronto delle lunghezze non è immediatamente significativo. Posso pensare a un secondo orologio fermo in cima alla montagna, ma sorge allora il problema di sincronizzare i due orologi. Una soluzione è di far partire, da un punto D a metà strada, un segnale radio di sincronismo che viaggi alla velocità della luce, e che giunga contemporaneamente alla base e alla cima: così facendo ho due linee orarie dal via dell'esperimento alla fine, che partono dallo stesso punto e giungono allo stesso punto nello spazio-tempo: DAC e DBC.

Per i tratti DA e DB dei segnali radio, la lunghezza è zero (a parte che si tratta comunque di due tratti uguali). Per i rimanenti tratti utilizziamo le solite formule: indicando con v la velocità dei muoni, con $\Delta\tau$ la lunghezza di AC e con $\Delta t = 6\,\mu\mathrm{s}$ quella di BC:

$$\Delta\tau = \Delta t\,\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{9–2}$$

Come si vede, $\Delta\tau < \Delta t$, e se v è vicina a c può essere anche parecchio più piccolo di $2\,\mu\mathrm{s}$ (vita media dei muoni a riposo). Questo spiega perché un buon numero di muoni riescono ad arrivare a terra.

Non c'è molto di più da dire. La cosa interessante è che anche in questo caso per interpretare correttamente l'esperimento bisogna confrontare due curve che partono dallo stesso punto e giungono allo stesso punto nello spazio-tempo. Si tratta di mostrare che hanno lunghezze diverse (come al solito, quella che sembra più corta è in realtà più lunga).

L'esperimento di Briatore e Leschiutta

Esaminiamo ora un altro esperimento, un altro pezzo della fisica degli orologi relativistici. Questo esperimento è legato al redshift gravitazionale, ma invece di misurare la differenza tra la frequenza della radiazione emessa e quella della radiazione ricevuta, misura direttamente il tempo. Per noi è importante, perché direttamente collegato alla rappresentazione geometrica che abbiamo usata.

L'esperimento è stato fatto in diversi luoghi e in diverse varianti: noi prenderemo in considerazione quello fatto da Briatore e Leschiutta nel 1975, fra Torino e un laboratorio in montagna, sul gruppo del Cervino. Anche qui, per vedere qualcosa ci vogliono orologi atomici.

Due orologi identici vennero posti uno a Torino, nel laboratorio dell'Istituto "Galileo Ferraris" e uno sul Plateau Rosà, a quota 3250 m rispetto a Torino. Com'è ovvio, i due orologi non differivano solo in quota: la loro distanza in linea d'aria era di circa 90 km. L'orologio di Torino (1) emetteva un segnale di sincronismo iniziale; dopo 68 giorni (la durata dell'esperimento) emetteva un segnale di sincronismo finale. Risultò che l'orologio 1 alla fine era indietro di $2.4\,\mu\mathrm{s}$ rispetto all'orologio 2.

Cominciamo col dire che ovviamente gli orologi vanno bene: sono stati ampiamente collaudati e controllati; l'orologio 2, una volta riportato a Torino, marciava d'accordo con l'altro. Sarebbe assai strano se eventuali danneggiamenti, dovuti al trasporto da Torino al Plateau Rosà, si fossero esattamente compensati nel viaggio di ritorno. Nei due laboratori tutto è uguale: grandezze come pressione, temperatura, ecc., possono essere mantenute uguali con ovvi accorgimenti; l'unica cosa inevitabilmente diversa è l'intensità del campo gravitazionale, di cui riparleremo fra poco.

La propagazione delle onde radio nell'atmosfera non può avere apprezzabili differenze fra l'inizio e la fine. Per spiegare un ritardo di $2.4\,\mu$s con una differente velocità di propagazione, bisognerebbe assumere una variazione di velocità assolutamente non credibile, se si tiene conto che in $2.4\,\mu$s la luce percorre 720 metri, cioè quasi l'1% della distanza fra i due orologi.

Nei due laboratori, come ho già detto, è tutto uguale, tranne il campo gravitazionale (non siamo ancora riusciti a modificarlo a piacere) ma la variazione della gravità da sola non è sufficiente a spiegare il fenomeno. Abbiamo discusso, all'inizio del corso, l'eventuale influenza del campo gravitazionale sugli orologi atomici, e vi ho assicurato che è trascurabile: lo era nel caso dell'esperimento H–K, ma qui la differenza è ancora più piccola, com'è facile calcolare. Occorre dunque trovare un'altra spiegazione della differenza, che è sicuramente genuina.

Sembra naturale concludere che "l'orologio più in alto va più svelto." Ma come vedrete, l'interpretazione che daremo sconsiglia di usare tale frase. L'ho citata perché è largamente usata; ma tenete presente, perché è un punto centrale del mio modo di presentare la relatività, che dovremo vietarci di dire cose del genere.

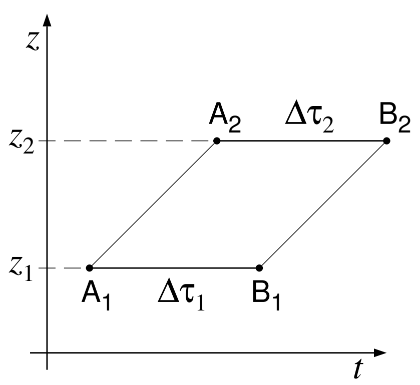


fig. 9–5

Per procedere nella spiegazione, disegniamo un diagramma spazio-tempo dell'esperimento (fig. 9–5). Anche in questo caso metto il tempo in ascisse e la coordinata spaziale in ordinate, per le stesse ragioni di prima. Si potrebbe anche fare invertendo gli assi: è chiaro che non cambierebbe niente. Però è forse il caso di fare un'osservazione didattica: per uno studente non è affatto facile interpretare una figura in cui gli assi sono scambiati rispetto a come lui è abituato. Se non ci credete, fate una prova facendo disegnare la parabola $y = x^2$, poi disegnate la stessa parabola con gli assi scambiati, e chiedete se saprebbero scrivere l'equazione della nuova curva. Ho visto che anche all'università molti studenti hanno difficoltà in tali situazioni.

L'orologio 1 sta fermo alla quota z_1; l'orologio 2 sta fermo alla quota z_2: le loro linee orarie sono rette orizzontali. Inizia l'esperimento. L'orologio 1 emette il segnale di partenza (evento A_1) che viaggia alla velocità della luce, e quando giunge in z_2 fa partire l'orologio 2 (evento A_2).

Dopo un certo tempo, l'orologio 1 manda il segnale di fine esperimento (evento B_1); questo giunge all'altro orologio (evento B_2) e termina la misura. Ciò che conta è che i segnali d'inizio e fine esperimento viaggino alla stessa velocità; non importa se quella della luce o no, basta che sia la stessa. Questo mi permette di dire che le curve orarie dei segnali sono rette parallele.

La figura $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{B}_1$ è un parallelogramma, in quanto ha i lati opposti paralleli; e noi sappiamo che i lati opposti di un parallelogramma sono uguali. Quindi anche i tempi misurati dai due orologi, che sono le lunghezze $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$ risp. di $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ e di $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2$ debbono essere uguali. Ma l'esperimento ci dice che $\Delta\tau_1 < \Delta\tau_2$!

Qui è proprio il caso di applicare un principio metodologico generale (dovuto a Galileo): se dopo una serrata critica l'esperimento regge, e i nostri ragionamenti o teorie portano a conclusioni differenti, non c'è che una strada: cambiare ragionamenti o teorie. Il dato che rimane è che l'orologio più in alto segna un tempo più lungo; l'interpretazione è ancora da costruire.

La realtà è diversa dalla sua rappresentazione

Per cominciare, occorre aver chiaro che un diagramma spazio-tempo *non è* lo spazio-tempo: è una sua rappresentazione, una mappa, una "carta geografica" degli eventi nello spazio-tempo. Ci si può quindi chiedere: questa mappa è fedele? Dico che una mappa è fedele se la misura delle distanze sulla carta torna con quelle reali: se il rapporto fra una distanza misurata sulla carta e una misurata nella realtà è *costante* (la *scala* della carta).

È ben noto che le carte geografiche che rappresentano la Terra non sono mai fedeli, perché la Terra è (circa) sferica e non c'è modo di rappresentare fedelmente una superficie sferica su un piano. Si può approssimare, tanto meglio quanto più ci si limita a una porzione piccola, ma non si otterrà mai una mappa fedele.

Osservate che è possibile fare una mappa non fedele anche di una superficie piana: basta deformare il disegno in qualunque modo. Si tratta sempre di una mappa, finché la corrispondenza punto a punto rimane biunivoca (e continua, differenziabile ...); ma la deformazione altera i rapporti delle distanze. Ci possono anche essere motivi validi per questo; ma mentre di una superficie piana è possibile, volendo, tracciare una mappa fedele, per una superficie sferica ciò non è proprio possibile.

Vediamo ora una figura che spiega perché avevo proposto il calcolo del grado di longitudine: calcolare la lunghezza di 1° di parallelo a due latitudini diverse. La fig. 9–6 mostra la carta d'Italia, rappresentata con paralleli equidistanti e meridiani equidistanti, ortogonali fra loro. Una carta così fatta è molto comoda per certi scopi: se voglio longitudine e latitudine di un punto basta un'interpolazione lineare.

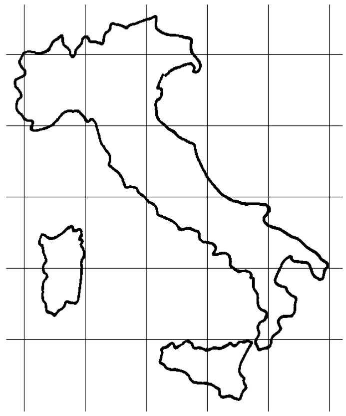


fig. 9–6

Naturalmente la carta non è fedele: se fissate due meridiani e ne misurate la distanza in Sicilia e poi dalle parti di Bolzano, sulla carta la distanza è sempre la stessa; se invece andate a fare le misure reali (che non è una cosa facile, specialmente dalle parti di Bolzano, ma i geodeti sanno fare questo e altro) trovate che è molto diversa, come abbiamo già calcolato. Non è certo una grande scoperta: sappiamo bene che i meridiani si avvicinano andando verso il polo. Ma il punto importante è che non solo questa particolare mappa non è fedele: in certi casi, come per la Terra, non si può fare diversamente. Si può usare una rappresentazione diversa, delle tante che sono state inventate dai geografi, ma sarà sempre infedele.

Insegnamento da trarre: quando si vede un disegno non bisogna prenderlo per la realtà: un disegno è una rappresentazione convenzionale della realtà e *può non essere fedele*. Per sapere se è fedele o no c'è un solo modo: confrontarlo con la realtà.

Riprendiamo allora il disegno di prima, quello dell'esperimento B–L. Ora che siamo ammaestrati a guardare il disegno come una carta geografica dello spazio-tempo, ci rendiamo conto che il fatto che sulla carta appaia $\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$ non dimostra niente: non vuol necessariamente dire che quei due tempi siano uguali; può darsi che sia vero ma può darsi di no. Se voglio accertarlo devo fare l'esperimento. Come abbiamo visto, le misure mi dicono che i tempi sono diversi: $\Delta\tau_2 - \Delta\tau_1 = 2.4\,\mu$s su 68 giorni. La variazione relativa è circa $3 \cdot 10^{-13}$, che è molto poco; ma comunque sono diversi: quindi la fig. 9–5 *non è una mappa fedele dello spazio-tempo.*

Il fatto che la differenza sia così piccola ci spiega perché l'esperimento è stato possibile solo da quando esistono degli orologi atomici che siano allo stesso tempo trasportabili e abbiano la precisione necessaria. Il fatto che la mappa non è fedele c'insegna che la geometria dello spazio-tempo è un po' meno semplice di come appare sul disegno. Uno può dire che non gli piace, ma c'è poco da fare: il mondo è fatto in quel modo. La presenza del campo gravitazionale (è chiaro che è lui il responsabile di questo fatto, in quanto l'unica differenza significativa fra i due orologi è la loro quota) modifica la geometria dello spazio-tempo.

Esperimento B–L e redshift gravitazionale

L'esperimento B–L è la stessa cosa, in termini di orologi, dell'esperimento di Pound–Rebka–Snider in termini di frequenza, che abbiamo già discusso; quindi ce lo potevamo anche aspettare. Ricordate che l'esperimento di redshift gravitazionale l'abbiamo giustificato col PE, e da lì si vede che l'effetto dipende dalla gravità: il rif. accelerato nello spazio vuoto equivale a quello sulla Terra, dove c'è la gravità.

L'esperimento B–L è del tutto analogo, anche se fatto con orologi anziché con la frequenza della radiazione: sulla Terra, in presenza di gravità, si deve avere il ritardo mostrato dall'esperimento. Se invece lo stesso esperimento venisse fatto su una grande astronave, a motori spenti, nello spazio remoto (quindi in assenza di campo gravitazionale) un orologio a prua e uno a poppa, anche se molto distanti tra loro, non mostrerebbero nessuna differenza.

Vediamo più da vicino la relazione tra i due esperimenti. Supponiamo che nell'esperimento B–L, oltre ai segnali d'inizio e fine, venga inviato tra i due orologi anche un treno di onde monocromatiche: sia ν_1 la frequenza misurata alla partenza. Se il treno consiste di N cicli, sarà

$$N = \nu_1 \Delta\tau_1.$$

Gli stessi N cicli vengono ricevuti all'arrivo, ma con una frequenza ν_2 e nel tempo $\Delta\tau_2$: dunque

$$N = \nu_2 \Delta\tau_2.$$

Confrontando:

$$\frac{\Delta\tau_2}{\Delta\tau_1} = \frac{\nu_1}{\nu_2}. \tag{9–3}$$

Come sappiamo, $\nu_2 < \nu_1$ e l'esperimento B–L ci mostra che $\Delta\tau_2 > \Delta\tau_1$, come richiesto dalla (9–3).

Parlando del redshift gravitazionale avevamo dato l'espressione (7–1) per la variazione di frequenza:

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{gh}{c^2}$$

e poi, nella discussione del problema 8.3, avevamo osservato che gh non è che la differenza ΔV del potenziale gravitazionale, per cui

$$\frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{\Delta V}{c^2}.$$

Ora la (9–3) ci mostra che tempi e frequenze nei due esperimenti vanno in proporzione inversa, per cui le variazioni relative (che sono molto piccole) saranno opposte. Possiamo quindi scrivere:

$$\frac{\delta\Delta\tau}{\Delta\tau} = -\frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{\Delta V}{c^2}. \tag{9–4}$$

Lo spazio-tempo è curvo

Vediamo di concludere, riassumendo i concetti fondamentali. L'esperimento B–L ci mostra che l'usuale mappa spazio-tempo non è fedele. Le carte geografiche della Terra non sono mai fedeli perché la superficie della Terra è curva. Conclusione: lo spazio-tempo è curvo. La conclusione è giusta, ma il modo di arrivarci è sbagliato. La mia affermazione a questo punto suonerà strana, e debbo quindi giustificarla.

I passi principali sono:

1) l'esperimento B–L ci dice che la mappa spazio-tempo non è fedele;
2) la superficie della Terra è curva, quindi non se ne possono fare mappe fedeli (il termine matematico è "isometriche").

Tra le due situazioni c'è però una grande differenza: per la Terra io *non posso* fare una mappa fedele, perché la superficie della Terra è *curva* e quindi non è rappresentabile fedelmente su un piano. (Notate che quando dico "curva" intendo sferica, non ad es. cilindrica. Una porzione di superficie cilindrica è isometrica a una porzione di piano, e infatti è sviluppabile sul piano senza deformazioni.) È essenziale il fatto che *non esiste* mappa fedele della Terra.

Invece nel caso dell'esperimento B–L noi abbiamo solo scoperto *una* mappa non fedele, ma questo non dimostra che non ne esista alcuna. Può essere colpa nostra, della rappresentazione che abbiamo scelta. L'esperimento c'insegna che in presenza della gravità si ottiene una mappa non fedele: ma allora, se non ci fosse la gravità si potrebbe creare una mappa fedele. Dunque la soluzione è semplice: basta porsi in un RI, in caduta libera, e allora, mancando la gravità, avremo una mappa fedele dello spazio-tempo.

Ma questo è proprio vero? Possiamo davvero far sparire la gravità? Localmente sì, ma in presenza di un campo gravitazionale non uniforme vi sono sempre quei piccoli effetti che sappiamo (le forze di marea) che non è possibile cancellare.

Del resto, anche per le carte geografiche, se prendiamo una piccolissima porzione della Terra possiamo avere una rappresentazione così prossima a essere fedele, che gli strumenti non rivelino differenza tra le misure sulla carta e sul terreno: localmente anche una superficie curva può essere rappresentata fedelmente. (In termini matematici, questa proprietà si esprime dicendo che si tratta di una *varietà riemanniana*.) Però su grande scala ciò non è possibile.

Nello spazio-tempo la situazione si presenta proprio nello stesso modo, perché posso far sparire la gravità approssimativamente, ma non esattamente. Che succede se faccio l'esperimento di Pound–Rebka in un satellite? Avrò un piccolo effetto di redshift (l'abbiamo calcolato nel problema 8–3), e se c'è questo avrò anche un piccolo risultato per l'esperimento B–L. Sarebbe un esperimento fantascientifico, perché l'effetto è assai piccolo, e occorrerebbe un satellite immenso, orologi estremamente raffinati, ecc.; ma dal momento che il campo gravitazionale prodotto dalla Terra, dal Sole, o da qualunque altro corpo, non è uniforme, non c'è modo di farlo sparire completamente. Di conseguenza *non è possibile disegnare una mappa fedele dello spazio-tempo.*

Notate che l'analogia non è superficiale: è profonda, si tratta proprio della stessa cosa. Quindi *lo spazio-tempo è curvo.*

Questa è una delle grandi scoperte di Einstein: la gravità implica una curvatura dello spazio-tempo. Come vedete, si riesce ad arrivare a conclusioni assai profonde della RG con un'analisi di poche cose, purché siano quelle giuste. Solo 25 anni fa questi discorsi non si sarebbero potuti fare, perché gli esperimenti non c'erano; si sarebbe dovuto ricorrere a ragionamenti molto più complicati. Ancor più dobbiamo ammirare Einstein, che ci è arrivato 80 anni fa, del tutto senza esperimenti…

È possibile parlare agli studenti di queste cose. Naturalmente so bene cosa potrete obiettare: si tratta di cose difficili, non tanto per i conti o le formule, quanto per l'astrazione e i ragionamenti. Occorre saper cambiare punto di vista; svincolarsi da concezioni radicate, direi quasi dogmatiche. Ma tutto sta a vedere cosa s'intende per maturità: se s'intende che si dev'essere in grado di affrontare questi ragionamenti oppure no; se si deve riuscire a seguire certi ragionamenti astrusi dei filosofi e questi no. Ma ne riparleremo ancora.

Problemi

1. Un'astronave A si trova a motori spenti nello "spazio profondo," molto lontana da qualsiasi stella. Dall'astronave parte una scialuppa S di esplorazione: essa viaggia in linea retta, con accelerazione costante rispetto ad A in modulo pari a g, per 30 giorni (tempo di A). Poi cambia il verso dell'accelerazione, sempre tenendo costante il modulo, per altri 60 giorni. Infine inverte ancora l'accelerazione per 30 giorni.

a) Dove si trova S dopo 60 giorni (tempo di A)?

b) E dopo 120 giorni?

c) Quanto tempo è trascorso, nel secondo caso, secondo l'orologio di bordo di S?

2. Risolvere per via sintetica il problema del triangolo.

3. Se i muoni prodotti dai raggi cosmici, nell'esperimento che abbiamo descritto, hanno velocità $v = 0.9999\,c$, quanto vale il rapporto N/N_0 tra quelli contati sul monte e quelli contati a livello del mare? (I dati sono: dislivello $h = 1800\,\text{m}$; vita media dei muoni $\tau_\mu = 2\,\mu\text{s}$.)

4. Quali altri "errori" ci sono nella carta di fig. 9–6, oltre la variazione di scala lungo i paralleli a seconda della latitudine?

Risposte

Problema 1. (L'astronave e la scialuppa):

Le indicazioni sull'astronave servono a stabilire che la possiamo trattare come un RI. Inoltre l'accelerazione della scialuppa è definita *rispetto ad* A, quindi dal punto di vista cinematico la relatività non c'entra: la legge del moto di S è quella solita del moto uniformemente accelerato.

Per inciso (ma è irrilevante per il problema) per far muovere le scialuppa in quel modo i suoi motori non dovranno esercitare una spinta costante: di questo riparleremo nell'ambito della dinamica relativistica, e in particolare discuteremo perché ciò *non significa* che la massa della scialuppa aumenta con la velocità.

Alla fine dell'intervallo $T = 30$ giorni $= 2.6 \cdot 10^6\,\text{s}$, la scialuppa avrà una velocità $gT = 2.5 \cdot 10^7\,\text{m/s}$, e avrà percorso uno spazio $\frac{1}{2}\,g\,t^2 = 3.3 \cdot 10^{13}\,\text{m} \simeq 220\,\text{UA}$. La velocità si annullerà al tempo $2T$, quando lo spazio percorso sarà doppio. Dato che l'accelerazione negativa continua, al tempo $3T$ la scialuppa avrà velocità $-gT$, e infine, al tempo $4T$, sarà ferma rispetto ad A.

Perciò

a) Dopo 60 giorni la scialuppa sarà a 440 UA dall'astronave.

b) La simmetria del moto di andata e ritorno dice subito che dopo 120 giorni S si trova proprio accanto ad A.

In formule, abbiamo

$$v(t) = \begin{cases} g\,t & (0 \le t \le T) \\ g\,(2T - t) & (T \le t \le 3T) \\ g\,(t - 4T) & (3T \le t \le 4T). \end{cases} \tag{9–5}$$

Il calcolo del tempo proprio di S si riduce all'integrale (8–7):

$$\Delta\tau = \int_0^{4T} \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}\, dt$$

che con le (9–5) per $v(t)$ si può esprimere in funzioni elementari. Però dato che $gT/c = 6.9 \cdot 10^{-3}$ è ragionevole sviluppare in serie la radice, conservando solo i termini fino al secondo ordine in gT/c. Inoltre, data la simmetria del moto, basta considerare l'intervallo $[0, T]$ e poi moltiplicare per 4 il risultato.

Abbiamo dunque:

$$\Delta\tau \simeq 4\int_0^T \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt = 4T - \frac{2}{c^2}\int_0^T v^2\, dt = 4T - \frac{2g^2T^3}{3c^2}.$$

e mettendo i numeri

$$\Delta\tau \simeq 4T - 84\,\mathrm{s}.$$

c) L'orologio di bordo di S sarà indietro di 84 secondi rispetto a quello di A.

Problema 2. (Problema del triangolo):

Sia ABC il triangolo, D un punto del lato AB, E un punto del lato AC, F l'intersezione di CD e BE (fig. 9–7). Conosciamo le aree dei triangoli BCF, BDF, CEF. Congiungiamo A con F. Le aree dei triangoli ABF, AEF stanno nello stesso rapporto di BF ad EF, perché rispetto a quelle basi i due triangoli hanno la stessa altezza. Lo stesso è vero per BCF, CEF: dunque

$$\text{area(ABF)} : \text{area(AEF)} = 10 : 8.$$

Con ragionamento del tutto simile si trova anche

$$\text{area(ACF)} : \text{area(ADF)} = 10 : 5.$$

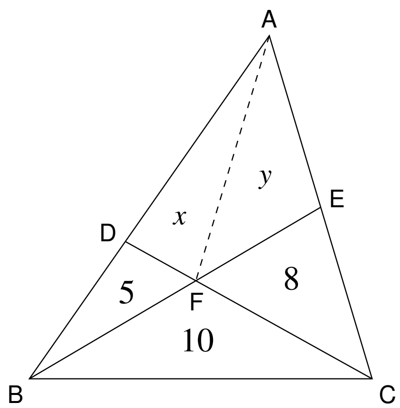


fig. 9–7

Indichiamo con x, y le aree di ADF, AEF rispettivamente: abbiamo allora

$$(x + 5) : y = 10 : 8$$
$$(y + 8) : x = 10 : 5$$

da cui $x = 10$, $y = 12$.

Come si vede, la chiave della soluzione sta nell'aggiunta di un elemento ausiliario alla figura, in questo caso il segmento AF. È una delle strategie indicate da G. Polya in quel prezioso libretto dal titolo *How to solve it* (Princeton 1971).

Problema 3. (Muoni dai raggi cosmici):

Il problema è immediato: basta calcolare $\Delta\tau$ con la (9–2), con $\Delta t = h/v \simeq h/c$, e poi si avrà

$$\frac{N}{N_0} = \exp\left(-\frac{\Delta\tau}{\tau_\mu}\right).$$

Dato che v/c è molto vicino a 1, col calcolo diretto si perdono un po' di cifre significative: 4 in questo caso, il che non è grave. Se si volesse evitare il problema, basterebbe scrivere

$$1 - v^2/c^2 = (1 - v/c)(1 + v/c)$$

e poi calcolare la radice quadrata.

Il risultato è $N/N_0 = 0.96$, contro un rapporto 0.05 che si avrebbe se $\Delta\tau$ fosse uguale a Δt (se non ci fosse "dilatazione del tempo").

Problema 4. (Errori nella carta di fig. 9–6):

Cominciamo con l'osservare che sulla carta paralleli e meridiani si tagliano ad angolo retto, come sulla sfera; dunque gli angoli vengono rispettati in questa rappresentazione?

La risposta è negativa, ma non è immediato vederlo. Osserviamo in primo luogo che sulla sfera la distanza tra due punti alla stessa longitudine, e che differiscono per $\Delta\varphi$ in latitudine, è $R\,\Delta\varphi$; invece la distanza tra due punti alla stessa latitudine, e la cui differenza in longitudine è $\Delta\lambda$, è *circa* $R\cos\varphi\,\Delta\lambda$.

Perché "circa"? La ragione è che quella scritta è l'esatta lunghezza dell'arco di parallelo, ma la distanza va presa lungo un cerchio massimo, che non coincide col parallelo (questo lo vedremo meglio nella prossima lezione). Però per piccole distanze l'approssimazione è lecita.

Se ora prendiamo due punti vicini, che differiscono tanto in longitudine quanto in latitudine (fig. 9–8), il segmento che li unisce formerà col meridiano un angolo α tale che

$$\Delta\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha = \cos\varphi\,\Delta\lambda.$$

La carta è stata costruita riportando in ascisse le latitudini, con un certo fattore di scala che chiamerò k_φ, e in ordinata le longitudini, con fattore di scala k_λ. Perché due diversi fattori di scala? Perché non c'è motivo che siano uguali, ma anzi può convenire prenderli diversi, scelti in modo da ottenere una rappresentazione non troppo infedele di una certa regione della Terra.

A questo scopo, fissata una latitudine $\bar\varphi$ della carta, converrà fare in modo che quando $R\,\Delta\varphi = R\cos\bar\varphi\,\Delta\lambda$ sia anche $k_\varphi\Delta\varphi = k_\lambda\Delta\lambda$; il che richiede $k_\lambda = k_\varphi\cos\bar\varphi$. Per es. per la carta di fig. 9–6 si è preso $\bar\varphi = 42°$ e quindi $k_\lambda = 0.74\,k_\varphi$.

Stando così le cose, l'angolo α sulla carta diventerà un α' tale che

$$k_\varphi\,\Delta\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha' = k_\lambda\,\Delta\lambda$$

ossia

$$\Delta\varphi\ \mathrm{tg}\,\alpha' = \cos\bar\varphi\,\Delta\lambda$$

e si vede che solo al centro della carta, per $\varphi = \bar\varphi$, avremo $\alpha' = \alpha$: sarà $\alpha' \gtrless \alpha$ a seconda che $\varphi \gtrless \bar\varphi$.

LEZIONE 10

Redshift e GPS

Oggi vorrei cominciare mostrando come le cose di cui abbiamo parlato non siano solo materia da libri di scuola o testi universitari, ma comincino ad avere applicazioni pratiche di notevole importanza.

Avevo già accennato al GPS (Global Positioning System), per rilevare che il funzionamento di quel sistema si basa in maniera fondamentale sull'invarianza della velocità delle onde e.m. Ora voglio far vedere che nel GPS entrano aspetti più sofisticati della relatività: proprio le cose che abbiamo esaminato.

Un breve riepilogo: il sistema è basato sull'esattezza degli orologi atomici montati sui satelliti. Semplificando alquanto, diciamo che la frequenza nominale degli orologi è 10.23 MHz; voglio dire che quegli orologi mandano impulsi con la cadenza di 10.23 MHz. Però questa è la frequenza *nominale*: se vi mettete sul satellite e misurate la frequenza dell'orologio trovate che è un po' minore: 10.22999999545 MHz. Perché questo? Perché il satellite sta su in alto, e occorre che il ricevitore a terra riceva gli impulsi con la cadenza di 10.23 MHz; cosa che non succederebbe se l'orologio lassù li emettesse a 10.23 MHz nel suo rif. Ci sono due ragioni: la prima è il redshift gravitazionale (che in realtà in questo caso è un "blueshift," visto che gli impulsi viaggiano verso il basso); la seconda che il satellite, com'è ovvio, non è fermo rispetto al ricevitore. Dunque oltre al redshift gravitazionale gioca quell'effetto che contro i miei gusti si usa chiamare "dilatazione del tempo." [1]

L'effetto complessivo è estremamente piccolo: se andate a fare il conto, la variazione relativa di frequenza è $5 \cdot 10^{-10}$, nel senso che la frequenza ricevuta è *più alta*.

Che conseguenze produce questo piccolo spostamento sul funzionamento del sistema? Abbiamo il ricevitore a terra, che riceve il segnale. Se non teniamo conto della variazione di frequenza, abbiamo un errore relativo di $5 \cdot 10^{-10}$ nelle misure di tempo: i segnali ricevuti sono progressivamente sfasati rispetto a come dovrebbero essere. Facciamo il conto di quello che succede in un'ora: $5 \cdot 10^{-10}$ di un'ora fa $1.8\,\mu$s; quindi in capo a un'ora il tempo ricevuto avanzerebbe di $1.8\,\mu$s.

Ora questi segnali si usano per misurare la posizione del ricevitore in base al ritardo con cui arrivano; se il segnale arriva $1.8\,\mu$s prima, è come se il ricevitore si fosse avvicinato al satellite. Dato che $1.8\,\mu$s moltiplicato per c fa 500 metri, senza la correzione dopo un'ora la posizione del ricevitore sarà sbagliata per 500 metri. E l'effetto è cumulativo: dopo due ore 1000 metri ecc... Quindi agli effetti dell'utilizzazione dello strumento sarebbe un disastro.

Notate che $1.8\,\mu$s è lo stesso ordine di grandezza dell'esperimento B–L, dove avevamo parlato di $2.4\,\mu$s. Come mai, visto che quell'esperimento durava 2 mesi? La ragione è che il satellite sta molto più in alto, quindi il blueshift gravitazionale è molto più grande.

Come vedete, in un sistema come il GPS gli effetti relativistici devono essere messi in conto; altrimenti l'apparato darebbe una deriva sistematica delle posizioni di tutti gli oggetti sulla Terra. Questo prova che gli effetti relativistici stanno entrando nella tecnica:

---

[1] La storia delle correzioni relativistiche nel GPS presenta aspetti interessanti. Quando fu messo in orbita nel 1977 il primo satellite con a bordo un orologio atomico, c'era dissenso tra i progettisti sul fatto che l'effetto relativistico fosse reale, e se ne dovesse davvero tener conto. Si raggiunse una soluzione di compromesso, consistente nel montare nel satellite un orologio regolabile a distanza: se davvero c'era l'effetto previsto, si sarebbe proceduto *a posteriori* a correggere la marcia dell'orologio. Come andarono le cose potete immaginarlo. Ma non è finita: quando fu progettato il GPS la correzione era ormai accettata, ma in un primo tempo fu calcolata in misura leggermente errata. L'errore fu corretto solo dopo 8 anni!

come dicevo prima, non sono più cose che si trovano soltanto nei libri di fisica. Detto in una battuta: anche gli ingegneri debbono imparare la relatività. Magari si limiteranno a imparare delle formule, ma almeno di questo non possono fare a meno.

Forze di marea e curvatura dello spazio-tempo

Abbiamo visto la volta passata che l'interpretazione dell'esperimento B–L ci era sembrata paradossale perché ragionavamo su diagrammi spazio-tempo che sono carte non fedeli della geometria dello spazio-tempo. Se ne può dedurre che lo spazio-tempo è curvo? Abbiamo visto che effettivamente lo spazio-tempo è curvo, ma per arrivarci bisognava capire che non solo la forza di gravità c'è sulla Terra; ma che anche se ci mettiamo in un rif. in caduta libera (ascensore di Einstein, o satellite in orbita) la forza di gravità rimane come differenza e continuerà a produrre un effetto, pur se piccolissimo. Nel problema 8.3 abbiamo calcolato quanto piccolo.

Dato che un piccolissimo effetto è ineliminabile (perché il campo gravitazionale non è uniforme) non c'è modo di fare una carta dello spazio-tempo fedele con la metrica di Lorentz: questo veramente significa che lo spazio tempo è curvo.

La discussione che faremo ora è dedicata alla relazione fra curvatura dello spazio-tempo e forze di marea. L'argomento delle forze di marea l'abbiamo toccato in più di un'occasione, ma ho sempre detto "poi ne riparleremo"; il momento è arrivato.

Avevamo già visto che si chiama "forza di marea" quel residuo della forza di gravità che non viene cancellata neanche nel rif. in caduta libera. Non abbiamo però discusso perché si chiama così. Naturalmente il nome deriva dal fatto che ha a che fare con le maree.

Le forze di marea sono la causa delle maree

In fig. 10–1 vedete il Sole, e la Terra in orbita attorno al Sole. Chiamiamo D la distanza tra il centro del Sole e il centro della Terra (supponiamo l'orbita circolare, per semplicità). Posso dire allora che la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale del Sole. Noi ci mettiamo appunto in questo rif. in caduta libera. Ricordo che quando dico "rif. in caduta libera" penso a un rif. che si muove come il centro della Terra, ma non ruota: è sempre orientato verso le "stelle fisse." Si tratta dunque di un rif. accelerato, ma in moto traslatorio, non rotatorio: altrimenti dovrei tener conto di effetti più complicati, dati dalla forza di Coriolis.

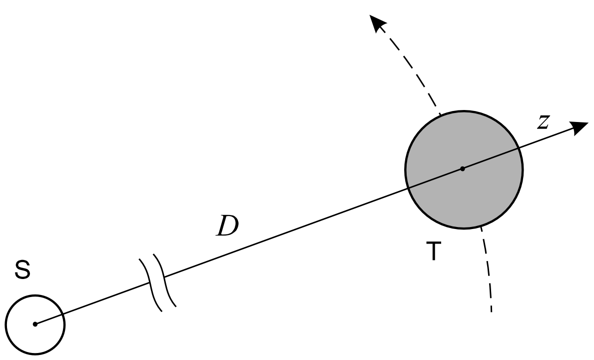


fig. 10–1

L'accelerazione di questo riferimento è nota: in modulo vale GM/D^2, uguale al campo gravitazionale del Sole nel centro della Terra. Però il campo in un punto della Terra che non sia il centro è diverso: sarà maggiore o minore a seconda che il punto sia più vicino al Sole, o più lontano.

Indico questo campo con g (anche se di solito g indica il campo gravitazionale della Terra sulla sua superficie, è ragionevole mantenere lo stesso simbolo). Allora, preso un asse z orientato dal Sole verso la Terra, con l'origine nel centro della Terra, $|g| = GM/(D+z)^2$. Questo per un punto sull'asse z; altrimenti l'espressione sarebbe un po' più complicata. La direzione del campo è sempre nel verso negativo dell'asse z, per cui scriverò $g_z = -GM/(D+z)^2$.

Dato che nei punti che ci possono interessare è sempre $z \ll D$, facciamo uno sviluppo in serie: il termine di ordine zero è $-GM/D^2$ (campo nel centro della Terra); il termine di primo ordine vale $2GMz/D^3$.

Se mi metto nel rif. in caduta libera la forza apparente cancella il primo termine, ma non il secondo (la stessa cosa che accade nell'ascensore di Einstein). Quindi nel rif. della Terra mi rimane un campo gravitazionale

$$g_{\mathrm{marea}} = \frac{2GMz}{D^3} \qquad (10\text{–}1)$$

a proposito del quale faccio notare due cose:

1) È proporzionale a z, quindi non solo aumenta se mi allontano dal centro della Terra, ma cambia verso col segno di z: se $z > 0$ è diretto verso fuori, se $z < 0$ è diretto in senso opposto, ossia *sempre fuori* dalla superficie della Terra.
2) Va come $1/D^3$, ossia è inversamente proporzionale al *cubo* della distanza Terra–Sole, non al quadrato. Quindi decresce molto più rapidamente quando ci si allontana dal Sole.

Sulla superficie della Terra $z = \pm R$, e allora $|g_{\mathrm{marea}}| = 2GMR/D^3$. Questa è una forza addizionale che agisce sempre verso l'esterno della superficie terrestre, e ha come conseguenza di ridurre il peso di un corpo in quei punti.

Bisognerebbe ora vedere che cosa succede se ci si mette in punti della superficie terrestre che non stanno sull'asse z. Per esempio, nei punti del piano perpendicolare all'asse z per il centro della Terra la distanza dal Sole è più o meno la stessa del centro; però la direzione del campo gravitazionale è diversa. Di conseguenza la forza apparente, sebbene abbia lo stesso modulo del campo agente in quei punti, non lo cancella perché ne differisce in direzione. I conti ve li lascio come problema; il risultato è che il campo di marea è diretto verso l'interno e ha grandezza metà di quella calcolata prima, ossia GMR/D^3.

Ora pensate all'acqua degli oceani: nei punti davanti al Sole e all'opposto, l'acqua pesa meno; nei punti appartenenti alla circonferenza nel piano perpendicolare invece pesa di più. Risultato: nei primi punti l'acqua si solleva, negli altri si abbassa. E con questo abbiamo spiegato perché si dice "forze di marea." Spiegare le maree vere è tutta un'altra storia: le cose si complicano molto, per diverse ragioni che accennerò più avanti. È interessante ricordare, da un punto di vista storico, che Newton riuscì a fare in dettaglio il calcolo della forza di marea, fino a stimare l'ampiezza delle escursioni delle maree oceaniche.

Qualcuno potrebbe chiedere: ma le maree non sono dovute alla Luna? Noi abbiamo mostrato che il Sole produce maree; e la Luna? Per la Luna il discorso è lo stesso, perché la Terra sente anche il campo gravitazionale della Luna. In effetti la Terra è in caduta libera nel campo gravitazionale della Luna come in quello del Sole; o meglio, dovrei dire che sulla Terra agisce la somma del campo gravitazionale del Sole e di quello della Luna, e la Terra è in caduta libera nel campo risultante. Quindi possiamo considerare separatamente l'effetto di marea del Sole e quello della Luna, poi sommarli.

Da un punto di vista didattico c'è però una differenza (ed è per questo che ho cominciato dal Sole): dire che la Terra è in caduta libera nel campo del Sole è pacifico, perché si pensa che il Sole è grosso e massiccio e praticamente sta fermo, e la Terra cade, nel senso che gli gira intorno; invece nel caso della Luna si pensa che sia questa che gira intorno alla Terra e non la Terra che gira intorno alla Luna. Però si tratta in parte di un equivoco, indotto dal fatto che la massa della Luna è più piccola di quella della Terra.

La Luna produce una forza gravitazionale sulla Terra, che sente la forza e ne viene accelerata; in questo senso la Terra *è in caduta libera* nel campo gravitazionale della Luna. Ovviamente è vero anche il viceversa: anche la Luna cade nel campo gravitazionale della Terra. Cadono tutt'e due, e l'effetto è che entrambe girano attorno al centro di massa comune. Poiché la massa della Luna è 1/80 di quella della Terra, si nota molto di più l'effetto sulla Luna; ma per ciò che ora c'interessa, ossia le maree sulla Terra, quello che conta è il campo che agisce sulla Terra e il moto di caduta libera di questa.

Se dovessimo fare il conto della forza di marea dovuta alla Luna arriveremmo alla stessa formula che abbiamo trovata per il Sole: basta solo sostituire i diversi valori dei parametri. Invece della massa del Sole ci va quella della Luna; al posto della distanza Terra–Sole, quella Terra–Luna. Ora la massa del Sole è molto più grande di quella della Luna, ma pure la distanza è maggiore. Se si vanno a mettere i numeri, capita una coincidenza curiosa, senza nessuna ragione profonda: l'ordine di grandezza delle due forze di marea è lo stesso. Più esattamente, la forza di marea dovuta alla Luna è un po' più del doppio di quella dovuta al Sole. Notate che si potrebbe facilmente equivocare: se non ci si rendesse conto che la forza di marea è un effetto differenziale e va come $1/D^3$, e si pensasse invece che le forze di marea vadano con la legge di Newton, siano cioè inversamente proporzionali al quadrato della distanza, si arriverebbe alla conclusione che l'azione del Sole è molto più importante.

Le maree reali sono complicate...

Riassumendo, come grossolana approssimazione si può dire che le maree dipendono dalla Luna, però l'effetto del Sole cambia le cose non di poco, visto che è la metà. È cosa nota da moltissimo tempo, scoperta per via empirica, che quando c'è luna nuova o luna piena, cioè quando Terra, Luna e Sole sono all'incirca allineati, le maree sono molto maggiori che non ai quarti. Poi le cose sono ancora più complicate, perché il piano su cui si muove la Luna rispetto alla Terra e quello in cui si muove il Sole non coincidono, quindi gli allineamenti sono variabili; per di più le orbite sono ellittiche, quindi le distanze cambiano; inoltre conta anche molto l'altezza dei due corpi sull'orizzonte. E queste sono solo le complicazioni astronomiche...

Ma c'è anche da considerare che la Terra non è uniformemente ricoperta d'acqua: ci sono i mari aperti, gli oceani, i golfi, gli stretti... Tutte queste particolarità geografiche producono diversi effetti, per cui in certi posti le maree sono altissime e in altri sono bassissime. Non solo: anche le fasi cambiano. Il nostro ragionamento porterebbe a dire che si avrà alta marea quando la Luna è sul meridiano, ma si vede che nei fatti ciò non è vero. In ogni luogo della Terra l'alta marea è sfasata rispetto al passaggio della Luna, di una quantità fissa ma diversa da un posto dall'altro. Una delle cause della variazione è l'attrito: l'onda di marea non può seguire istantaneamente il moto apparente della Luna (dovuto in realtà principalmente alla rotazione terrestre): per questo motivo resta indietro.

Ma non è tutto: se guardate ad es. i dati relativi alla marea sulla costa africana dell'Atlantico, dalla Liberia al Marocco, dove pure la longitudine cambia di poco, si vede che l'alta marea è sfasata di diverse ore. Qui la spiegazione è un'altra: è la forza di Coriolis. Bisogna infatti pensare che la marea non è solo un sollevamento dell'acqua: se l'acqua si alza in un posto e si abbassa in un altro, ci dev'essere dell'acqua che si sposta dal secondo posto al primo, ossia una corrente di marea. Quest'acqua che si muove sta sulla Terra (un rif. rotante) e sente la forza di Coriolis, quindi viene deviata verso destra (nell'emisfero nord). Il risultato è lo sfasamento che dicevo sopra.

Un fenomeno diverso si ha alle foci dei fiumi: negli estuari la corrente di marea s'insinua entroterra, e man mano che l'estuario si restringe il livello della marea aumenta. Infine, in certi casi ci sono veri e propri fenomeni di risonanza, con le frequenze proprie di oscillazione di masse d'acqua delimitate, come in golfi o stretti.

Questo era solo un velocissimo accenno per mostrare perché i fenomeni reali della marea si possono scostare moltissimo dai semplici calcoli che abbiamo fatto.

Maree e curvatura

Vediamo ora come le forze di marea sono legate alla curvatura dello spazio-tempo. Ritorniamo all'ascensore di Einstein: abbiamo detto più volte che nell'ascensore la forza

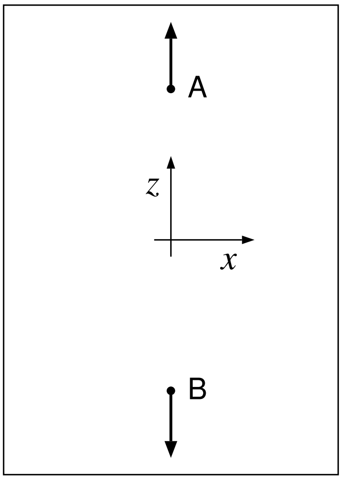


fig. 10–2

gravitazionale non si cancella completamente. Se lascio libere le due palline, quella in alto si muove in su e l'altra va in giù; se invece le voglio tenere ferme debbo applicare una forza, che naturalmente dovrà compensare la forza di marea: sarà una forza molto piccola, ma non nulla.

Il calcolo della forza si fa esattamente allo stesso modo come quello già fatto per la forza di marea sulla Terra, dovuta al Sole. Con riferimento alla fig. 10–2, basta sostituire nel ragionamento precedente il campo gravitazionale della Terra a quello del Sole. Il risultato sarà una formula del tutto simile alla (10–1), con l'unico cambiamento che M starà a indicare la massa della Terra, e al posto di D (distanza Terra–Sole) dovremo scrivere R (raggio della Terra):

$$g_{\mathrm{marea}} = \frac{2GMz}{R^3} \tag{10–2}$$

Esaminiamo il moto di queste palline in un diagramma spazio-tempo (fig. 10–3). Supponendo che siano inizialmente ferme, le due curve orarie partono entrambe orizzontali, ma poi divergono: ne segue che se misuriamo la loro distanza, questa cresce approssimativamente come il quadrato del tempo. Il moto relativo, almeno all'inizio, è uniformemente accelerato. Questo grafico ci servirà più avanti.

Ora un'affermazione importante: la cosa che ho appena detto *dimostra che lo spazio-tempo è curvo.* Riprendiamo un ragionamento che in parte abbiamo già fatto. Che vuol dire che la superficie della Terra è curva? Finora abbiamo esaminato il concetto di curvatura della superficie solo dal punto di vista delle carte geografiche. Abbiamo detto: dato che la superficie della Terra è curva, non è possibile rappresentarla su di un piano; non è possibile costruire una carta geografica che non abbia deformazioni. Però se voglio dare una definizione di curvatura, e possibilmente anche una misura di curvatura, come posso procedere?

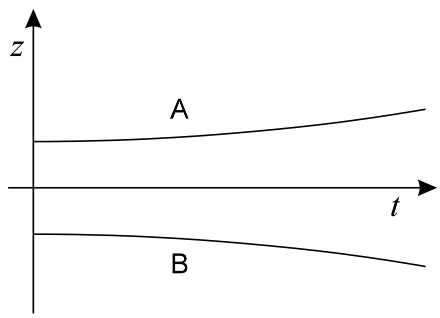


fig. 10–3

Se ci si chiede oggi di provare che la Terra è curva, probabilmente la risposta più semplice è: guardando la Terra dalla Luna si vede che è una palla. (È ovvio che questo metodo non è il primo con cui si è scoperta la curvatura terrestre, ma è certamente il più diretto.) Un altro metodo, assai più antico, è quello di Eratostene, che in un certo senso è l'inverso: col primo metodo si guarda la Terra da fuori; seguendo Eratostene si sta sulla Terra e si guarda verso fuori: si guarda il Sole e l'ombra che esso produce.

Si può fare anche con le stelle: per es. si misura l'altezza della stella polare da diversi punti della superficie terrestre; si vede che l'altezza cambia e da qui si ricava il raggio della Terra.

Però i due metodi hanno in comune che entrambi richiedono di pensare la superficie della Terra immersa nello spazio tridimensionale: noi vediamo che la superficie è curva perché la possiamo confrontare con qualcosa che sta fuori, in una terza dimensione.

Finché siamo interessati alla Terra, non ci sono obiezioni. Il fatto è che tutto questo ragionamento sulla superficie della Terra lo stiamo facendo per scoprire che cosa vuol dire che lo spazio-tempo è curvo. Ora c'è una differenza essenziale fra la superficie della Terra e lo spazio-tempo: mentre possiamo pensare di uscire dalla Terra, o di guardare fuori dalla Terra, *non possiamo uscire* dallo spazio-tempo o *guardare fuori* dallo spazio-tempo.

Quindi i metodi visti non possono essere adattati per fare una misura della curvatura dello spazio-tempo. Lo spazio-tempo è tutto quello che c'è: non si può uscirne fuori, né guardare fuori. Occorrerà inventare altri metodi, buoni per la superficie terrestre, ma che richiedano solo misure fatte sulla superficie. Il nostro problema è quindi: come si fa a misurare la curvatura della superficie terrestre senza uscire dalla superficie? Ci sono diversi modi (in tutti, per semplicità, assumo la Terra sferica, almeno all'inizio).

Come misurare la curvatura

Primo metodo. Tracciamo la curva formata da tutti i punti che hanno una stessa distanza r dal polo nord (sarà ovviamente un parallelo). Misuriamo la lunghezza l della circonferenza. Se R è il raggio della sfera, non è difficile vedere che

$$l = 2\pi R \sin(r/R).$$

Dunque dalla misura di l e di r posso ricavare R, anche se in pratica il calcolo non è semplicissimo. Se $r \ll R$ si può sviluppare in serie di potenze il seno e si ottiene approssimativamente

$$l = 2\pi r \left(1 - \frac{r^2}{6R^2}\right)$$

che è più semplice da risolvere rispetto a R.

Comunque sia, la curvatura si manifesta qualitativamente nel fatto che $l < 2\pi r$; poi la formula permette di ricavare R dalla misura di r e di l, e posso anche dare questa come *definizione* di R (con qualche cautela su cui non mi soffermo).

Un secondo metodo è quello del triangolo sferico. Sulla superficie della Terra traccio un triangolo sferico, i cui lati sono archi di cerchio massimo. Misuro gli angoli interni e li sommo. Si sa che la somma dei tre angoli non è π ma $\pi + \varepsilon$, dove ε si chiama *eccesso sferico*. E si sa anche che $\varepsilon = A/R^2$, dove A è l'area del triangolo: l'eccesso sferico è tanto maggiore quanto più grande l'area del triangolo. È chiaro quindi che dalla misura degli angoli e dall'area posso ricavare il raggio. Non è un metodo molto pratico, ma concettualmente funziona.

Qui mi sembra opportuna un'avvertenza. Il discorso del triangolo sferico potrebbe ricordare quello che dicemmo in una delle primissime lezioni, a proposito della misura di Gauss: la triangolazione fra tre cime di montagne. Ma invece non c'entra niente. Lì il problema era se i raggi di luce, che normalmente intendiamo come rette nello spazio euclideo, formassero un triangolo euclideo o no. I raggi di luce non erano obbligati a seguire la curvatura terrestre.

Qui invece siamo ancorati alla superficie, i lati del triangolo sono tracciati sulla superficie della sfera (sono archi di cerchio massimo) e gli angoli di cui si parla sono angoli fra archi di cerchio massimo, o se preferite fra le tangenti a due cerchi massimi nel punto d'intersezione. Quindi abbiamo a che fare con triangoli sferici. L'eventuale curvatura dello spazio intorno alla Terra, di cui si preoccupò Gauss, qui non c'entra: lo spazio tridimensionale è euclideo; è la superficie della sfera che non lo è.

Questi due metodi sono abbastanza naturali e facili da pensare, ma non sono utili per il nostro scopo; vediamo quindi un terzo metodo. È altrettanto poco pratico dei precedenti se lo scopo è di misurare davvero il raggio della Terra, ma come vedremo funziona meglio per la nostra applicazione allo spazio-tempo.

La deviazione delle geodetiche

Prendiamo due punti A e B sull'equatore, a distanza ξ tra loro (fig. 10–4). Partendo da quei due punti, ci spostiamo lungo i meridiani che vanno da A e da B verso i poli. Percorriamo lungo i due meridiani uno stesso tratto s: arriveremo in due punti A′

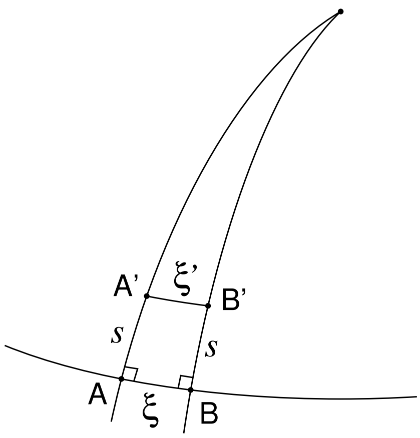


fig. 10–4

e B′. Ora misuriamo la distanza ξ' fra questi due punti: ovviamente troveremo che $\xi' < \xi$.

Quantitativamente si ha $\xi' = \xi\,\cos(s/R)$ e da qui si può calcolare R. Si arriva a questa formula ragionando così: l'angolo diedro fra i due semipiani che contengono i nostri meridiani è ξ/R; il raggio del parallelo che unisce A′ con B′ è $R' = R\cos(s/R)$. Allora

$$\xi' = R'\,\frac{\xi}{R} = \xi\cos(s/R). \qquad (10\text{–}3)$$

Però c'è un errore.

L'errore è che la distanza fra A′ e B′ non va misurata lungo il parallelo, ma lungo l'arco di cerchio massimo che li unisce: questo rispetto al parallelo corre un po' più in alto, verso il polo. Si tratta di un fatto ben noto a chi naviga, in mare o in aria. Se si prendono due luoghi sulla Terra, molto lontani tra loro e circa alla stessa latitudine, e si guarda che rotta percorrono gli aerei per andare da un luogo all'altro, si scopre che passano vicino al polo. Per esempio, la rotta aerea da Londra per il Giappone passa sull'Alaska, nonostante che tanto Londra quanto Tokio siano molto più a sud dell'Alaska.

L'errore c'è, ma non è importante. Volendo possiamo scrivere la formula giusta, che è

$$\sin\frac{\xi'}{2R} = \sin\frac{\xi}{2R}\,\cos\frac{s}{R}\,; \qquad (10\text{–}4)$$

ma a me interessa applicare l'idea per piccoli valori di ξ. Dato che fra la (10–3) e la (10–4) le correzioni sono solo al terzo ordine, posso tranquillamente confonderle: al posto di $\sin(\xi'/2R)$ scrivere $\xi'/2R$ ecc. Il vantaggio della (10–3) è che si dimostra in modo elementare, mentre la (10–4) richiede la trigonometria sferica. Non mi soffermo a spiegare come ci si arriva.

Ancora più interessante è una terza versione della formula, che va bene se non solo ξ è piccolo ma è piccolo anche s, cioè se mi sposto poco dall'equatore. Allora, sviluppando in serie la (10–3):

$$\xi' = \xi\left(1 - \frac{s^2}{2R^2}\right).$$

Si vede che la diminuzione della distanza va col quadrato di s. La ragione è (scusate il gioco di parole) che all'inizio i due meridiani sono paralleli: partono entrambi ad angolo retto rispetto all'equatore. Quindi al prim'ordine la distanza non cambia.

Infine una quarta versione, che sebbene appaia più complessa è poi la più utile:

$$\frac{1}{R_{\mathrm{c}}^2} = -\frac{1}{\xi}\,\frac{d^2\xi}{ds^2}\,. \qquad (10\text{–}5)$$

La possiamo ricavare senza difficoltà dalla (10–3), derivando due volte. Notate che ora ho scritto R_{c} invece di R: la ragione è duplice. Una è che voglio sottolineare, con l'indice $_{\mathrm{c}}$, che sto parlando di un *raggio di curvatura* (che per la sfera non è che il solito raggio). La seconda, più spicciola, è che fra poco dovrò confrontare la (10–4) con un'altra formula, dove R ha un altro significato.

La (10–5) fornisce $1/R_{\mathrm{c}}^2$ come derivata seconda (la derivata seconda si spiega, perché la dipendenza di ξ da s è quadratica). La difficoltà è che si tratta di una relazione differenziale: in pratica ciò significa che occorre fare misure solo in una piccola regione attorno al punto in cui interessa misurare il raggio. Ma questa è anche la ragione per cui è utile: questo carattere "locale" permette di generalizzarla, ossia di applicarla a superfici di forma qualsiasi.

Possiamo prendere la (10–5) come definizione generale del raggio di curvatura di una superficie; quella che si chiama *curvatura gaussiana.* La tecnica rimane quella già vista: scelto un punto, si fa partire un meridiano (se si tratta di una superficie qualunque non posso parlare di meridiano: dovrei dire una *geodetica*, ma preferisco sorvolare per ora); ci si sposta di un piccolo tratto in direzione perpendicolare al meridiano tracciato, e dal nuovo punto così raggiunto si fa partire un altro meridiano (geodetica). Si studia come le due geodetiche (i due meridiani) si avvicinano: si calcola l'espressione (10–5) e si ottiene la curvatura. Notate che nella formula c'è un segno meno: la ragione è che la distanza diminuisce, mentre $1/R_\mathrm{c}^2$ è certamente positivo.

Per la sfera è ovvio che se fissato il punto iniziale si cambia il polo (in una sfera tutti i punti sono equivalenti, quindi ogni punto può fare da polo) e si lavora coi nuovi meridiani e col nuovo equatore, si otterrà lo stesso risultato. Non è assolutamente ovvio, e c'è voluto Gauss per scoprirlo, che lo stesso è vero per ogni superficie. La direzione in cui fate partire le geodetiche non è importante: in un dato punto c'è *una sola curvatura* della superficie, che si ottiene sempre dalla (10–5), comunque si scelgano le geodetiche.

Deviazione delle geodetiche nello spazio-tempo

Forse non è ancora molto chiaro che cosa c'entri tutto questo con lo spazio-tempo; ma torniamo all'ascensore di Einstein e al grafico che descrive la distanza delle palline (fig. 10–3).

Se non ci fosse la forza di marea, le palline resterebbero ferme e la loro distanza non cambierebbe. Invece cambia: abbiamo già visto il calcolo. In un RI in assenza di gravità ecc., il moto naturale dovrebbe essere rettilineo uniforme: il grafico della curva oraria nello spazio-tempo sarebbe rettilineo. In particolare, se le palline sono inizialmente ferme, restano ferme: le loro coordinate restano costanti e i grafici sono due rette parallele.

Sulla Terra non è possibile procedere diritti e mantenere la stessa distanza fra i due meridiani, perché la superficie è curva; nello spazio-tempo non è possibile avere moti naturali (dritti) a distanza costante. Ce lo mostra l'ascensore in caduta libera: le palline lasciate libere non restano ferme e i loro diagrammi orari non sono rette parallele. Uno curva verso l'alto e uno verso il basso. Ma se succede questo, vuol dire che lo spazio-tempo è curvo.

Quindi *forza di marea e spazio-tempo curvo sono due modi di vedere la stessa cosa.* Dal punto di vista newtoniano voi dite che le palline cominciano a muoversi e quindi le curve orarie divergono, perché c'è la forza di marea. Dal punto di vista di Einstein il discorso è semplicemente: non è possibile disegnare due grafici di moti naturali che siano due rette (geodetiche) parallele, perché lo spazio-tempo è curvo: non ci sono rette parallele in uno spazio-tempo curvo.

Come vedete, si tratta di un'idea piuttosto semplice, o almeno così appare oggi; l'analogia con la Terra ci aiuta. Ma non dimentichiamo mai che c'è voluto Einstein.

A questo punto siamo anche in condizioni di calcolare la curvatura dello spazio-tempo. Riprendiamo la formula (10–2) della forza di marea

$$g_\mathrm{marea} = \frac{2GM}{R^3}\,z$$

dove R è il raggio della Terra, M la sua massa, z la quota rispetto al centro dell'ascensore. (Attenzione: io continuo a dire "forza di marea" ma in realtà quello che ho scritto è un campo, ossia una forza per unità di massa.) Se questa è la forza di marea (per unità di massa) l'accelerazione della pallina sarà esattamente uguale.

Com'è giusto, l'accelerazione dipende da z: se la pallina è al di sopra del centro dell'ascensore accelererà verso l'alto, se è al di sotto accelererà verso il basso. La legge del moto della pallina sarà

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{2GMz}{R^3} \tag{10–6}$$

che ora possiamo confrontare con la (10–5), che ci dava la deviazione delle geodetiche, e dalla quale si ricava

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{\xi}{R_\mathrm{c}^2}. \tag{10–7}$$

Ora guardate le (10–6) e (10–7): in (10–7) c'è la derivata seconda di ξ, che è la distanza dei due meridiani, fatta rispetto a s, che è lo spazio percorso sul meridiano. Nella (10–6) abbiamo la derivata seconda di z, che è la distanza di una pallina dal centro dell'ascensore (o se volete la metà della distanza dall'altra pallina) fatta rispetto al tempo che passa.

Il secondo membro della (10–7) mostra che questa derivata è proporzionale a ξ; nella (10–6) è proporzionale a z. Il coefficiente nella (10–7) è il reciproco del quadrato del raggio di curvatura della superficie. E nella (10–6)?

Posso già quasi (sul "quasi" torno fra un momento) dire che questo coefficiente $2GM/R^3$ nella (10–6) ha la stessa funzione di $1/R_\mathrm{c}^2$ nella (10–7). Le due formule sono strettamente analoghe: in un caso ho due meridiani che si avvicinano, perché la superficie della Terra è curva; nell'altro caso ho le curve orarie delle palline che si allontanano, perché lo spazio-tempo è curvo. La misura della curvatura si fa allo stesso modo, quindi le due formule hanno la stessa funzione.

Perché ho detto che è "quasi" la stessa? In primo luogo perché nella (10–6) si deriva rispetto al tempo e nella (10–7) rispetto allo spazio. Ma questo per noi non è un problema. Conosciamo bene la ragione storica: abbiamo cominciato a costruire la fisica misurando tempo e spazio con unità diverse. Perciò dobbiamo solo ridurre il tempo a unità spaziali, cosa che si ottiene dividendo la (10–6) per c^2:

$$\frac{d^2z}{c^2dt^2} = \frac{2GMz}{c^2R^3}. \tag{10–8}$$

Ora c^2dt^2 della (10–8) è proprio l'equivalente del ds^2 nella (10–7), e questo mi autorizza a scrivere

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = \frac{2GM}{c^2R^3} \tag{10–9}$$

dove R_c è il raggio di curvatura cercato.

Curvatura dello spazio-tempo attorno alla Terra

È dunque vero che la forza di marea ci permette di calcolare la curvatura dello spazio-tempo. A destra nella (10–9) figurano: la costante di gravitazione G, la velocità della luce, la massa M e il raggio R della Terra.

Avrete certo notato il segno meno, che c'è nella (10–7) e non nella (10–6). Il punto è che non tutte le superfici hanno curvature dello stesso segno: la sfera ha curvatura positiva per definizione, ma se prendete una superficie "di tipo iperbolico," ad esempio una sella, trovate che ha curvatura negativa. Quindi non c'è motivo di aspettarsi che la derivata $d^2\xi/ds^2$ debba risultare sempre negativa (che le geodetiche si debbano sempre avvicinare): può essere anche positiva, se le geodetiche si allontanano.

Quando la derivata è negativa si dice che la curvatura è positiva; questa è solo una convenzione, scelta per dare curvatura positiva alla sfera. Di conseguenza, quando la derivata è positiva si dovrà dire che la superficie ha curvatura negativa. Dunque lo spazio-tempo ha curvatura negativa.

Possiamo anche toglierci la curiosità di calcolare quanto viene R_c. Non è poi così importante, ma si trova $1.7 \cdot 10^{11}$ m, non molto diversa dalla distanza Terra–Sole. È un puro caso, perché la curvatura dello spazio-tempo in vicinanza della Terra dipende solo dalla Terra; che la Terra sia più o meno lontana dal Sole non conta niente. Però può avere un'utilità mnemonica sapere che R_c è all'incirca un'unità astronomica.

È invece importante notare che nell'espressione della curvatura compare M/R^3, che ha a che fare con la densità della Terra. Sfruttiamo questo fatto, e troviamo:

$$\frac{1}{R_c^2} = \frac{2GM}{c^2R^3} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{G\varrho}{c^2}. \tag{10–10}$$

A parte il fattore numerico $8\pi/3$ e le costanti fondamentali G e c, la sola cosa che conta per calcolare il raggio di curvatura dello spazio-tempo alla superficie della Terra è la densità media ϱ della Terra. (Dico "media" perché la densità della Terra varia dal centro alla superficie, com'è noto.) Allo stesso modo, la curvatura in vicinanza del Sole dipenderà solo dalla densità media del Sole. Questa è minore, ma non di molto, di quella della Terra; quindi i raggi di curvatura dello spazio-tempo vicino alla Terra o vicino al Sole non sono molto diversi.

La ragione dell'importanza della (10–10), a parte che ci permette questi raffronti fra Terra e Sole, è che essa non è altro che una versione molto semplificata, ma che contiene tutta la sostanza, delle equazioni della RG di Einstein.

L'idea fondamentale della RG è che la curvatura dello spazio-tempo è prodotta dalla presenza di materia, e che la materia determina la curvatura proprio in questo modo: *l'inverso del quadrato del raggio di curvatura è proporzionale alla densità della materia.* Naturalmente le vere equazioni di Einstein sono alquanto più complicate: al posto di $1/R_c^2$ vi figura il cosiddetto "tensore di Einstein," al posto della densità ϱ il "tensore energia-impulso." Ciò diventa essenziale quando si vogliono fare i conti esatti per ricavarne tutti gli effetti previsti dalla RG; ma per i nostri scopi quanto ho detto può essere sufficiente.

Come vedete si riesce ad arrivare al contenuto fondamentale delle idee di Einstein sulla RG con un ragionamento che non presenta particolari difficoltà, e non richiede conoscenze avanzate. Certo il difficile è non perdersi per strada nel ragionamento, ma le formule, i calcoli o le nozioni di base che bisogna avere non sono niente di speciale.

Curvatura e B–L

Alla curvatura dello spazio-tempo ci si può arrivare per una strada diversa dalla forza di marea: con l'esperimento B–L nel satellite. Nella lezione passata abbiamo visto che l'esperimento fatto nel satellite mostrerebbe un effetto piccolissimo ma non nullo. Abbiamo anche visto (9–4) che in generale

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = \frac{\Delta V}{c^2}$$

dove ΔV è la variazione del potenziale gravitazionale, ossia il lavoro per unità di massa della forza di gravità, cambiato di segno. La forza di marea (sempre per unità di massa) nel satellite vale $2GMz/R^3$; la differenza di potenziale è $-GMz^2/R^3$. Quindi nel satellite

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = -\frac{GMz^2}{c^2R^3} \tag{10–11}$$

Ricordate: la forza di marea non è costante, ma è proporzionale a z; quindi bisogna integrare. Avevamo pure notato il segno opposto: dal centro verso l'esterno del satellite non si ha redshift, ma blueshift.

Guardiamo ora la fig. 10–5, che riproduce il grafico dell'esperimento (è la stessa della (9–5)): anche qui ho due curve che dovrebbero essere parallele e che invece non lo sono, com'è mostrato dal fatto che i due lati orizzontali del presunto parallelogramma hanno lunghezza diversa. Ci troviamo quindi nella stessa situazione del grafico delle forze di marea.

Di nuovo ho due geodetiche che partono parallele, ma poi si avvicinano o si allontanano. In questo caso si avvicinano, come si vede dal segno meno; quindi il raggio di curvatura, calcolato con la solita formula

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = -\frac{1}{\xi}\,\frac{d^2\xi}{ds^2}$$

con $\tau(z)$ dato dalla (10–11) al posto di $\xi(s)$, viene

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}^2} = -\frac{1}{\tau}\,\frac{d^2\tau}{dz^2} = \frac{2GM}{c^2R^3}$$

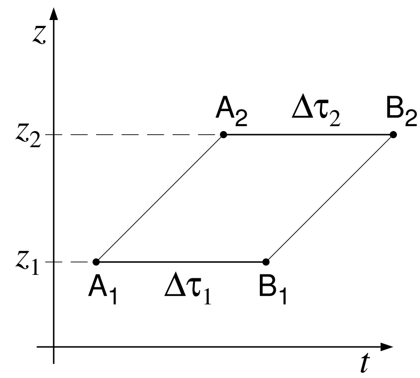


fig. 10–5

cioè lo stesso trovato per l'altra via.

È però necessario un commento. Parlando della forza di marea noi abbiamo confrontato le accelerazioni delle palline; da queste abbiamo ottenuto due curve orarie: una che andava in su e una che andava in giù (fig. 10–3). Abbiamo percorso queste curve, che sarebbero delle rette se lo spazio tempo fosse piatto, e abbiamo studiato come varia la loro distanza: abbiamo misurato la differenza delle z in funzione di t.

Nell'esperimento B–L sul satellite noi mandiamo segnali da una z all'altra, e ne misuriamo lo scostamento in t. In realtà qui c'è una differenza, perché non possiamo mandare i segnali in verticale nel grafico 10–4: vorrebbe dire mandarli a velocità infinita. Ci dobbiamo rassegnare a mandarli alla velocità della luce, quindi obliqui nello spazio-tempo; però quello che c'interessa è che varia la z, e scopriamo che la distanza in tempo non resta costante.

Dunque: mentre prima misuravamo la Δz in funzione del tempo, ora misuriamo la $\Delta\tau$ in funzione di z. Ma Gauss ha mostrato che nel caso di curvatura di una superficie, i "meridiani" usati per misurare la curvatura si possono prendere in qualunque direzione, e la curvatura è sempre la stessa. Ora abbiamo visto che anche nello spazio-tempo è la stessa cosa.

Nello spazio-tempo, in un primo esperimento ho preso come "meridiani" (in realtà geodetiche) delle curve che vanno nella direzione di t (tempo); nel secondo ho preso delle geodetiche che vanno nella direzione di z. Così si vede che due esperimenti che sembrano totalmente diversi in realtà misurano la stessa cosa, com'è mostrato dalla formula finale, che è la stessa. *Entrambi gli esperimenti misurano la curvatura dello spazio-tempo.*

In verità, quel teorema di Gauss secondo cui la curvatura è la stessa in qualunque direzione si prendano le geodetiche, è vero solo in due dimensioni. Se le dimensioni sono più di due non basta un solo numero per caratterizzare le proprietà di curvatura della varietà. Ciò accade ovviamente per lo spazio-tempo: per descriverne completamente la curvatura occorre il tensore di Riemann. Questo tensore ha una sola componente indipendente in due dimensioni, ma più d'una se le dimensioni sono tre o più (nello spazio-tempo sono ben 20).

Ma una volta che ho scelto una particolare sezione bidimensionale dello spazio-tempo, se resto sempre su quella allora una sola curvatura è sufficiente. Noi abbiamo sempre lavorato nella sezione delle coordinate t e z: questo spiega perché il risultato sia sempre lo stesso. Ma se avessimo preso t e x avremmo potuto trovare un risultato diverso. D'altronde questo l'avevamo già visto, se ricordate: avevo detto che la forza di marea in direzione x è diversa che in direzione z…

D: Nell'espressione del raggio di curvatura compare G che misura la grandezza della forza d'interazione nella legge di Newton. Che ci sta a fare?

F: Perché non ti chiedi come fa a dipendere dalla velocità della luce? Che c'entrano le onde e.m.? Invece c non ci preoccupa, perché basta usare come unità di misura al posto del metro il secondo-luce e si elimina subito. Anche G si può eliminare: basta usare la giusta unità di massa. Per informazione: questa unità è tale che un metro equivale a circa 220 masse terrestri. Usiamo quella come unità di massa, e G sparisce.

Problemi

1. Ripetere il calcolo della forza di marea solare, per un punto situato nel piano per il centro della Terra, perpendicolare alla congiungente Terra–Sole.

2. Stimare l'altezza delle maree solari.

3. Discutere l'influenza del Sole e della Terra sul moto della Luna.

4. Partendo dal problema 1, calcolare la curvatura della sezione (x, t).

Risposte

Problema 1. (Forza di marea sul piano perpendicolare):

Con riferimento alla fig. 10–1, assunto un asse x per il centro della Terra e perpendicolare a z, il vettore $\vec{g}$ (fig. 10–6) ha le seguenti componenti:

$$g_x = -\frac{GMx}{(D^2 + x^2)^{3/2}} \qquad g_z = -\frac{GMD}{(D^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Invece la forza apparente ha solo la componente z già vista.

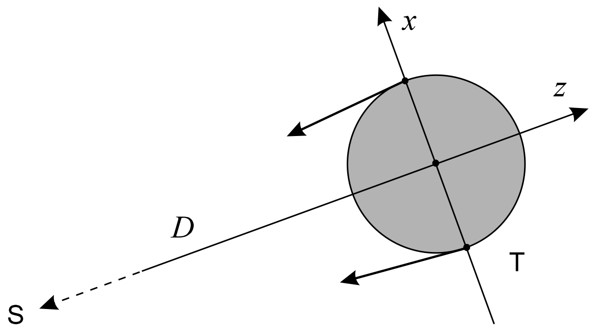


fig. 10–6

Lo sviluppo di g_z in serie di potenze di x dà $-GM/D^2 + \mathrm{O}(x^2)$; il primo termine è compensato dalla forza apparente, mentre il secondo è trascurabile. Per quanto riguarda g_x lo stesso sviluppo dà

$$g_x = -\frac{GM}{D^3}\,x + \mathrm{O}(x^3)\,.$$

Dunque la forza di marea è diretta verso il centro della Terra, e ha grandezza metà di quella calcolata lungo l'asse z.

Problema 2. (Altezza delle maree solari):

Il modo più diretto per risolvere il problema è di sfruttare un teorema della statica dei fluidi: in un campo di forza conservativo le superfici di ugual pressione, e in particolare la superficie libera di un liquido, sono equipotenziali.

Trascuriamo l'effetto della rotazione terrestre, che aggiungerebbe un potenziale centrifugo, comunque costante in un dato punto della Terra. Allora dobbiamo tener conto solo del potenziale gravitazionale della Terra

$$V_{\mathrm{grav}} = -\frac{GM_\oplus}{r} \tag{10–12}$$

e del potenziale della forza di marea, che lungo l'asse x vale

$$V_{\text{marea}}(x,0,0) = \frac{GM_\odot}{2D^3}\,x^2$$

e lungo l'asse z

$$V_{\text{marea}}(0,0,z) = -\frac{GM_\odot}{D^3}\,z^2.$$

Siano ora h_x, h_z le altezze della marea rispetto alla superficie di riferimento $r = R$ (h_x sarà negativa). Possiamo trascurare la dipendenza del potenziale di marea da h_x, h_z, e approssimare al primo ordine la (10–12):

$$V_{\text{grav}} = \begin{cases} -\dfrac{GM_\oplus}{R}\left(1-\dfrac{h_x}{R}\right) & \text{lungo l'asse } x \\[2ex] -\dfrac{GM_\oplus}{R}\left(1-\dfrac{h_z}{R}\right) & \text{lungo l'asse } z. \end{cases}$$

Imponendo l'uguaglianza del potenziale $V_{\text{grav}} + V_{\text{marea}}$ si ha

$$-\frac{GM_\oplus}{R}\left(1-\frac{h_x}{R}\right) + \frac{GM_\odot R^2}{2D^3} = -\frac{GM_\oplus}{R}\left(1-\frac{h_z}{R}\right) - \frac{GM_\odot R^2}{D^3}$$

da cui

$$h_z - h_x = \tfrac{3}{2}\,R\,\frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{R}{D}\right)^3 = 25\,\text{cm}.$$

Problema 3. (Il moto della Luna):

A. L'effetto della Terra sul moto della Luna è del tutto ovvio: la Luna gira attorno alla Terra, di cui sente l'attrazione gravitazionale. Al più c'è da osservare una cosa già detta: dato che la massa della Luna è piccola, ma non piccolissima (circa 1/80 di quella della Terra) è più corretto dire che Terra e Luna girano insieme attorno al comune centro di massa G.

Tale centro di massa si trova a una distanza dal centro della Terra che è circa 1/80 della distanza Terra–Luna, che vale circa 384 000 km (distanza media, dato che il moto della Luna non è esattamente circolare). Dunque G dista 4800 km dal centro della Terra, ossia *è interno alla Terra.*

Questo non è un problema: l'unico inconveniente che ne deriva sta nella spiegazione della forza di marea lunare sulla Terra, che diventa un po' più complicata perché bisogna stare bene attenti ai versi delle forze. Ma non è necessario occuparcene.

B. Passiamo all'effetto del Sole. Il primo effetto evidente è che Terra e Luna sono soggette all'attrazione solare; quindi G si muove in orbita attorno al Sole, mentre Terra e Luna girano attorno a G.

Diventa allora più complicato visualizzare l'effettiva traiettoria della Terra e della Luna: si trova a volte in qualche libro una figura come la fig. 10–7, del tutto errata, o come la fig. 10–8, anch'essa errata ma in modo più sottile.

Vediamo perché le due figure sono sbagliate. Quanto alla fig. 10–7, sarebbe giusta se in qualche momento la Luna si trovasse ad avere, in un rif. solidale al Sole, velocità di verso opposto a quella di G. Ma è facile verificare, prendendo i dati delle varie orbite, che la velocità di G vale circa 30 km/s, mentre quella della Luna rispetto a G è circa 1 km/s. Dunque la velocità della Luna in un rif. solidale al Sole oscillerà tra 29 e 31 km/s: 31 quando la Luna è più lontana dal Sole (luna piena), 29 quando è più vicina (luna nuova).

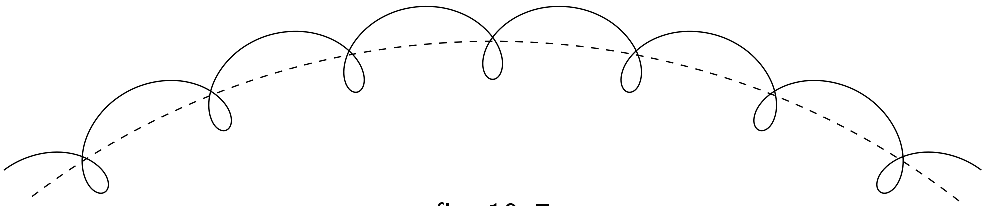


fig. 10–7

Nella fig. 10–8 la traiettoria della Luna mostra dei tratti in cui è convessa verso il Sole, e altri in cui è invece concava. Ora il vettore accelerazione è sempre diretto nel verso della concavità, quindi la figura sarebbe giusta se in un punto come A l'accelerazione fosse diretta verso l'esterno, ossia se la forza di attrazione della Terra superasse quella del Sole.

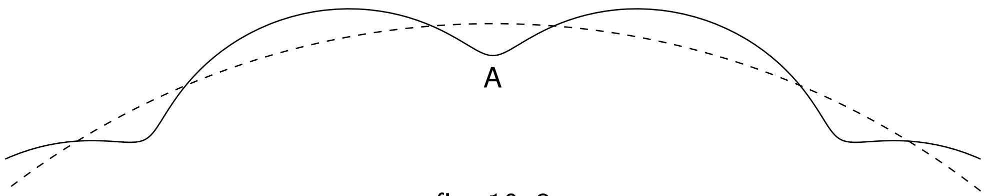


fig. 10–8

Il rapporto delle distanze Terra–Luna e Sole–Luna è circa 1/390, mentre il rapporto delle masse di Sole e Terra è circa $3.3 \cdot 10^5$. Tenuto conto che la forza va come l'inverso del quadrato della distanza, si vede che la forza del Sole sta a quella della Terra nel rapporto $(3.3 \cdot 10^5)/390^2$ che vale circa 2. Dunque la risultante delle forze che agiscono sulla Luna *è sempre diretta verso il Sole*, e perciò la traiettoria della Luna *è sempre concava verso il Sole*.

È solo il raggio di curvatura che cambia, nel rapporto circa 1 a 3, tra la fase di luna piena, dove Terra e Sole tirano dalla stessa parte, e quella di luna nuova, dove invece la Terra tira in verso opposto al Sole. C'è da dire che la figura corretta è piuttosto difficile da fare (fig. 10–9), e non ricordo di averla mai vista.

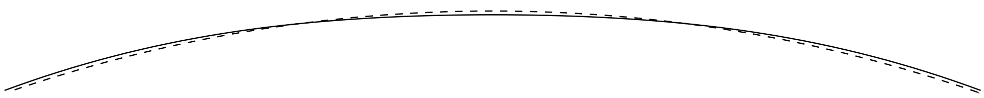


fig. 10–9

Va da sé che tutto quanto detto vale per il caso Terra–Luna; per altri pianeti e satelliti i numeri sono diversi, e anche la traiettoria del satellite può riuscire diversa. Per i satelliti di Marte è giusta la fig. 10–8. Per i satelliti galileiani di Giove c'è maggiore varietà: per Io ed Europa è giusta la fig. 10–7, per Ganimede e Callisto la fig. 10–8.

C. Esiste infine un effetto del Sole sulla Luna che ha molto più a che fare con l'argomento di questa lezione: la forza di marea.

Nella lezione 6 ho accennato al fatto che in un rif. solidale con la Terra, che è in caduta libera nel campo del Sole, la solita cancellazione tra forza gravitazionale del Sole e forza apparente non è esatta per la Luna, perché il campo gravitazionale del Sole nella posizione della Luna non è uguale a quello sulla Terra, e varia al variare della posizione della Luna stessa.

A parte la precisazione, che ora abbiamo vista, che in realtà è piuttosto G a essere in caduta libera, il discorso è esattamente lo stesso che abbiamo fatto per spiegare la forza di marea sulla Terra; possiamo quindi servirci di quei calcoli per stimare l'effetto sulla Luna.

Basta riprendere la (10–1), e applicarla alla Luna, invece che a un corpo sulla superficie della Terra. Ciò richiede solo di sostituire al posto di z la distanza Terra–Luna, che chiamerò d: si ottiene

$$g_{\text{marea}} = \frac{2GM_\odot d}{D^3}.$$

Per capire quanto sia importante, dobbiamo confrontare questa forza con l'attrazione terrestre, che vale

$$g_\oplus = \frac{GM_\oplus}{d^2}.$$

Il rapporto è

$$\frac{g_{\text{marea}}}{g_\oplus} = 2\,\frac{M_\odot}{M_\oplus}\left(\frac{d}{D}\right)^3.$$

Mettendo i numeri, si trova $1.1 \cdot 10^{-2}$, che non è certo poco: dobbiamo aspettarci scostamenti dell'ordine dell'1% nel moto della Luna rispetto alle leggi di Keplero. Per esempio, che la Luna possa trovarsi avanti o indietro sulla sua orbita di qualcosa come 1°, ed è proprio ciò che accade. Inoltre il perigeo lunare non ha direzione fissa, ma ruota facendo un giro in circa 9 anni, e anche il piano dell'orbita ruota in circa 19 anni. Queste irregolarità nel moto della Luna erano già note agli astronomi greci.

Problema 4. (Curvatura della sezione (x,t)):

Questo è molto semplice: visto che la forza di marea in direzione x è metà che in direzione z, e ha verso opposto, lo stesso accade per la curvatura dello spazio-tempo. In grandezza vale la metà, ed è positiva, dal momento che nella sezione (z,t) l'avevamo trovata negativa.

LEZIONE 11

Premessa

Questa seconda parte tratterà due argomenti distinti. Il primo è la dinamica relativistica; nel secondo si parla di Universo, galassie, modelli cosmologici ... in una parola, cosmologia.

Nelle lezioni di due anni fa avevamo fatto un'introduzione a quella parte della relatività che si chiama (secondo una tradizione da cui preferisco discostarmi) "relatività generale"; come dissi allora, io preferisco non fare distinzione fra RR e RG. In particolare non approvo che si consideri la RR come cosa di cui si può parlare con una certa facilità, mentre la RG sarebbe cosa inaccessibile, complessa. Cerco di dimostrare che questo non è vero, che tutta la relatività è accessibile anche nella s.s.s.

Abbiamo parlato del PE, di come viene reinterpretato nella fisica einsteiniana; abbiamo visto cosa significa curvatura dello spazio-tempo. Dopo tutto questo la cosmologia ci sta bene, anzi è un'applicazione necessaria.

Il corso ha un doppio ruolo: serve a dare un approfondimento delle vostre conoscenze su un importante settore della fisica; ma ha anche una funzione didattica. L'approfondimento della cultura fisica sta bene, ma ci si deve anche domandare come utilizzare e presentare questi argomenti. D'altra parte, trattare questioni che non sono da affrontare in classe serve per capire cosa c'è dietro.

Mi capiterà di fare riferimento a un libretto che ho scritto anni fa, o di riprenderne per intero qualche pagina (titolo: *Per un insegnamento moderno della relatività*). È un libro per insegnanti, non per studenti, per più ragioni: non ci sono esercizi né esempi, i pochi problemi sono piuttosto difficili; per renderlo alla portata degli studenti occorrerebbe un lavoro addizionale. In realtà la linea del discorso è alla portata degli studenti, ma ci sono anche molte discussioni a carattere metodologico e didattico, che agli studenti non servono e non interessano. Con ciò non sto dicendo che sia sconsigliato farlo leggere; lo si potrebbe fare magari indicando quali pagine saltare. Va anche detto che il libro risente di essere la rielaborazione di lezioni ormai vecchie di 10 anni: in questo tempo ho sviluppato meglio alcune idee, e forse anche l'equilibrio dei diversi argomenti è un po' cambiato.

I principi della dinamica relativistica

Cominciamo indicando le preconoscenze che gli studenti devono avere:

- l'invarianza della velocità della luce nei RI
- il suo carattere di velocità limite
- alcune questioni relative al tempo proprio e alla geometria dello spazio-tempo
- che la legge di "composizione" galileiana delle velocità non può essere mantenuta, proprio per l'invarianza della velocità della luce.

Ovviamente gli studenti conosceranno i principi della meccanica newtoniana. Ci si pone ora il problema se questi principi vanno d'accordo con le conoscenze di relatività che abbiamo, oppure se bisogna cambiare qualche cosa.

Prima affermazione: *i principi restano gli stessi*, pur di enunciarli adeguatamente. Allora cosa cambia? In primo luogo saranno da cambiare le relazioni newtoniane tra p, E, v. Ma ciò che caratterizza la meccanica relativistica non è il cambiamento delle formule! Troppo banale! Assumo che nel lavoro già fatto sulla fisica sia già successo di scrivere formule un po' più generali per comprendere fatti nuovi. Quindi non sarebbe niente di rivoluzionario, come invece la relatività è, rispetto alla meccanica newtoniana, e non solo per le ragioni che abbiamo già visto.

Il cuore della dinamica relativistica sta nella nuova interpretazione di massa ed energia. Su questo dobbiamo ragionare e pensare; anche perché si tratta di un argomento su cui si dicono molte cose, a volte semplicemente sbagliate, altre volte che non aiutano a capire, ma portano fuori strada. Perciò la discussione su massa ed energia sarà il tema centrale della parte sulla dinamica relativistica. Oggi però ci occuperemo dei principi, e fin qui non ci sono particolari difficoltà.

Il primo principio non si modifica in alcun modo: abbiamo discusso di questo parlando di rif. inerziali (RI). Tutto ciò che sappiamo dalla meccanica newtoniana rimane vero, salvo per la novità importante che nel quadro della RG il concetto di RI cambia, e ha significato soltanto locale: non ci si può aspettare che esista un RI esteso nello spazio e nel tempo. Il cambiamento nella definizione di RI consiste nel considerare tale un rif. in caduta libera in un campo gravitazionale; abbiamo ampiamente discusso che ciò implica l'abolizione della forza di gravità. Newton direbbe (questa è un'inesattezza storica: dovrei dire "la meccanica newtoniana dell'800 direbbe") che la gravità scompare perché bilanciata da una forza apparente; Einstein dice invece che quella è la sostanza del RI. Per es. la stanza in cui siamo non è un RI, perché c'è la forza di gravità; è un rif. spinto verso l'alto per contrastare la caduta libera.

Occorre anche ricordare che un RI ha significato solo locale, cioè limitato a regioni dello spazio-tempo piccole. Se l'intervallo di tempo delle misure non è piccolo, o se si opera su una regione spaziale estesa, ci si accorge della presenza della Terra, attraverso la forza di marea.

Passiamo al secondo principio. Questo si salva benissimo, a condizione che al posto di $\vec{F} = m\vec{a}$ si scriva $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. La correzione non è irrilevante, dal momento che in meccanica relativistica non vale $\vec{p} = m\vec{v}$; quindi $d\vec{p}/dt$ non è uguale a $m\vec{a}$. Va detto che in un certo senso questo è un ritorno a Newton: infatti il suo enunciato del secondo principio è: "*mutatio motus = vis impressa*" dove "motus" è la nostra quantità di moto.

Non è la prima volta che faccio notare come in Einstein non tutto sia nuovo: in più punti si ha invece un ritorno al passato (Galileo, Newton). Bisogna poi osservare che se anche ora sappiamo che le leggi "corrette" sono un po' diverse da quelle comunemente in uso, noi non buttiamo via la vecchia dinamica per usare la relatività nella pratica quotidiana! La meccanica classica newtoniana va bene per un numero considerevole di fatti e situazioni della pratica, della tecnica, e anche della fisica di laboratorio; già questa è un'ottima ragione per continuare a studiarla. La seconda ragione è che le due teorie non sono indipendenti: la relatività utilizza concetti e grandezze che sono state definite nella meccanica newtoniana, delle quali abbiamo studiato le proprietà e ci siamo formati un'idea. Perciò anche da un punto di vista epistemologico la relatività si appoggia sulla meccanica newtoniana.

Il terzo principio

Il terzo principio ci richiederà un po' più di lavoro. Vedremo che non lo possiamo conservare nella forma di "principio di azione e reazione," ma solo come "conservazione della quantità di moto."

Un piccolo commento didattico. Molti studenti fanno confusione sul terzo principio: spesso lo confondono con una condizione di equilibrio. Non è sempre chiara la differenza fondamentale fra i due casi: una condizione di equilibrio si verifica se la risultante di due forze applicate *sullo stesso corpo* è nulla; invece il terzo principio asserisce l'uguaglianza (a parte il verso) di forze applicate *su corpi diversi.* E per di più il terzo principio vale sempre, anche quando l'equilibrio non c'è (pensate ad es. a Terra e Luna).

Ancora una nota: io userò "q. di moto" e "impulso" come sinonimi. Sapete bene che c'è anche una tradizione che li tiene distinti, riservando il termine "q. di moto" per $m\vec{v}$, e il termine "impulso" per $\vec{F}t$. Sarebbe interessante seguire l'evoluzione nel tempo di questa terminologia, e confrontare i diversi usi in diverse lingue... Ma non abbiamo il tempo.

Per un sistema isolato il principio di azione e reazione (PAR) implica la conservazione della q. di moto, ma *il viceversa non è vero.* I motivi sono essenzialmente due:

1) perché il PAR non dice solo che le forze sono opposte come vettori, ma anche che sono sulla stessa retta
2) perché se il sistema consiste di più di due punti materiali, il PAR vale per tutte le coppie azione-reazione, e questo non si può ricavare dalla sola conservazione della q. di moto totale.

L'osservazione 1) fa sì che dal PAR segua anche la conservazione del momento della q. di moto. Se invece le forze sono opposte ma non allineate, la loro risultante è nulla, la q. di moto si conserva, ma il sistema si mette a ruotare. Dovremmo quindi aggiungere anche la conservazione del momento angolare, ma questa è una complicazione che è bene evitare. Qui abbiamo un problema didattico di tutt'altra natura, che esce dalla relatività: è il caso di trattare nella s.s.s. argomenti relativi a moti rotatori e momento angolare? Al massimo i casi più semplici: altrimenti si cade subito in complicazioni matematiche...

Però debbo ancora spiegare perché il PAR non vale in relatività. Supponiamo che il PAR sia vero istante per istante in un certo RI che chiamo K. Si abbiano due particelle che si muovono su date traiettorie, e tra loro vi sia un'interazione (fig. 11–1). In generale le forze dipendono dal tempo, se non altro perché dipendono dalla distanza, che cambia nel tempo. Gli eventi $A_1 = (P_1, t_1)$ e $B_1 = (Q_1, t_1)$ sono simultanei in K, gli eventi $A_2 = (P_2, t_2)$ e $B_2 = (Q_2, t_2)$ sono anch'essi simultanei in K, e le forze d'interazione sono sempre tra loro opposte, ma diverse in A_1 e A_2 per intensità e direzione.

Se osservo lo stesso fenomeno da un altro RI, diciamo K′, grazie al PR mi aspetterei anche in K′ di vedere soddisfatto il PAR. Ma gli eventi A_1 e B_1, simultanei in K, non lo sono in K′ perché *la simultaneità dipende dal rif.* In K′ quando la particella A si trova in P_1 la particella B non si troverà in Q_1, ma in un altro punto. Perciò in K′ le forze d'interazione saranno diverse.

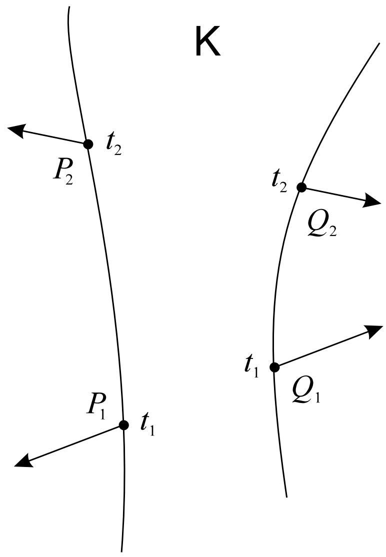


fig. 11–1

La simultaneità è relativa

Ho asserito poco sopra un fatto ben noto della RR, di cui finora non avevamo parlato. Vale la pena di una breve digressione per spiegarlo e dimostrarlo, anche perché posso approfittarne per mostrare ancora una volta come tutti i fatti fondamentali della RR possono essere spiegati senza ricorrere alle trasf. di Lorentz (com'è invece tradizionale fare, anche in questo caso).

Consideriamo dunque la seguente situazione: un treno percorre a velocità costante un binario rettilineo. A metà del treno si trova una sorgente luminosa, che invia un impulso in entrambe le direzioni: verso la testa $\mathcal{A}$ e verso la coda $\mathcal{B}$ del treno. Mettiamoci in un primo tempo nel RI che accompagna il treno, che indico con T: è ovvio che in questo rif. i due segnali arrivano simultaneamente alla testa e alla coda, dato che gli spazi da percorrere sono uguali e la velocità della luce è la stessa nei due versi.

La cosa può essere rappresentata in un diagramma orario (fig. 11–2) dove le due verticali sono le linee orarie di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$, e le rette a 45° sono quelle dei segnali luminosi.

Gli eventi rilevanti sono:

– P: partenza dei segnali
– $Q_{\mathcal{A}}$: arrivo del segnale in $\mathcal{A}$
– $Q_{\mathcal{B}}$: arrivo del segnale in $\mathcal{B}$.

La figura mostra chiaramente che $Q_{\mathcal{A}}$ e $Q_{\mathcal{B}}$ *sono simultanei*, dato che P è equidistante dalle due rette verticali.

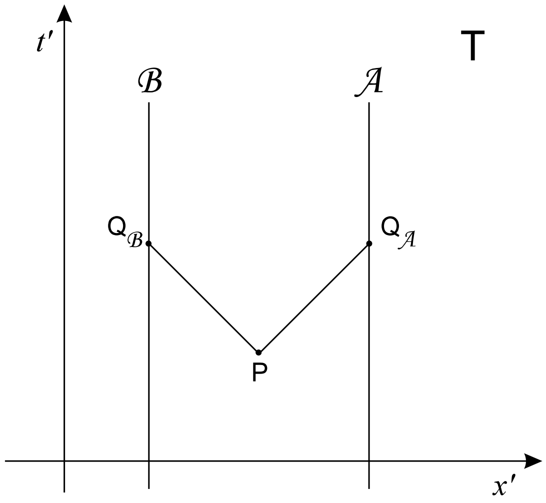


fig. 11–2

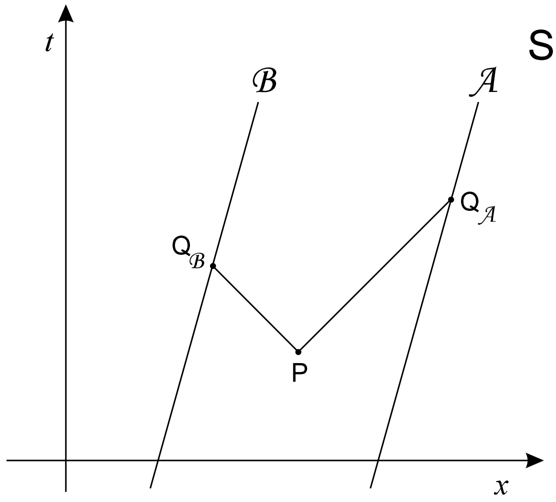


fig. 11–3

Passiamo ora al rif. S della stazione: la fig. 11–3 rappresenta ciò che si vede in questo rif. Il treno viaggia verso destra con velocità costante, quindi le linee orarie della testa e della coda sono ora rette inclinate, tra loro parallele. L'evento P ha ancora luogo a metà strada fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, come si vede in figura; i segnali luminosi hanno linee orarie a 45° come prima, perché *la luce viaggia a velocità c anche in* S. Ne segue che in questo rif. gli eventi $Q_{\mathcal{A}}$ e $Q_{\mathcal{B}}$ *non sono più simultanei.*

Come salvare la conservazione della quantità di moto

Riprendendo il discorso: abbiamo visto che se il PAR vale in K non vale in K′, e questo crea una difficoltà. In base al PR, vorrei che se il terzo principio vale in un rif. allora valga anche nell'altro; ma questo "fa a pugni" col fatto che la simultaneità è relativa. Non riesco a salvare entrambe le cose: il PR e la validità del terzo principio.

Prendiamo atto, ma cosa c'è sotto? C'è la pretesa che ogni coppia azione-reazione sia istantanea. Nella fisica newtoniana è insita l'idea che le azioni a distanza sono istantanee: se il corpo B si muove, il corpo A sente istantaneamente l'effetto di questo spostamento, e anche il corpo B sente istantaneamente che il corpo A è in un'altra posizione. Quindi il PAR, nella sua formulazione classica, è intimamente sposato con l'istantaneità delle azioni a distanza.

Noi invece sappiamo che esiste una velocità limite, quindi ci aspettiamo che azioni istantanee non ce ne siano: è per questo che il PAR non è compatibile con la relatività. In ambito relativistico si deve assumere che *ogni azione è mediata da un campo*, il quale si propaga con velocità finita. Ma allora? La via d'uscita è che si può conservare la q. di moto, anche se non vale il PAR.

Come si dimostra di solito la conservazione della q. di moto? Si parte dal PAR e dal secondo principio:

$$\frac{d\vec{p}_{\mathrm{A}}}{dt} = \vec{F}_{\mathrm{A}}, \quad \frac{d\vec{p}_{\mathrm{B}}}{dt} = \vec{F}_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(\vec{p}_{\mathrm{A}} + \vec{p}_{\mathrm{B}}) = \vec{F}_{\mathrm{A}} + \vec{F}_{\mathrm{B}} = 0.$$

Ma se il PAR non vale, $\vec{F}_\text{A} + \vec{F}_\text{B} \neq 0$ e la q. di moto non si conserva! Soluzione: nel bilancio della q. di moto occorre considerare anche quella del campo che media l'interazione. Se la q. di moto del sistema A + B non si conserva, è perché varia in corrispondenza la q. di moto del campo, e la variazione dell'una compensa la variazione dell'altra.

La cosa non è banale, perché occorre definire una q. di moto del campo in modo tale che la conservazione valga in ogni caso. Però questo è possibile, e non è il caso ora d'insistere. (C'è appena bisogno di dire che queste cose le dico per voi, ma sconsiglio di portarle in classe: c'è rischio che il ragazzo medio ne ricavi un guazzabuglio da cui non riuscirà a districarsi.)

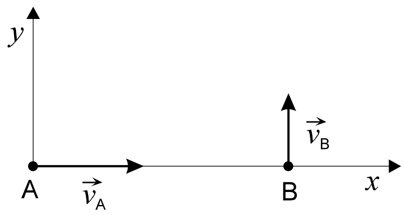


fig. 11–4

Un esempio ci aiuterà a capire meglio la situazione, ed è un esempio "non relativistico." In fig. 11–4 sono rappresentate due particelle cariche positive, che si muovono con le velocità indicate. Dato che sono cariche e si muovono, le particelle producono campi elettrici e campi magnetici. La particella A produce sicuramente nel punto B un campo elettrico, diretto lungo l'asse x; la particella B produce un campo elettrico in A, ancora diretto lungo l'asse x, nel verso negativo. Inoltre la particella A crea un campo magnetico a simmetria circolare, il cui asse coincide con l'asse x: il campo è nullo in B. La particella B invece crea un campo magnetico in A, diretto come l'asse z; quindi una forza (di Lorentz) diretta come $-y$ sulla particella A. Dunque le due forze, su A e su B, non sono opposte, visto che almeno le componenti y sono diverse: $\vec{F}_\text{A} + \vec{F}_\text{B} \neq 0$.

Come avete visto, non c'è stato bisogno di scomodare la relatività: nel caso di due particelle cariche in moto il PAR non vale e quindi la q. di moto delle particelle non si conserva. Per salvare la conservazione occorre tener conto della q. di moto (variabile) del campo e.m. Lascio a voi di pensare perché ho messo le virgolette a "non relativistico". Ci sono domande?

D: Lei ha detto che per la formulazione del secondo principio $\vec{F} = m\vec{a}$ e $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ sono la stessa cosa. Ma anche in meccanica classica in questo modo ci sfuggono ad es. tutti i problemi che coinvolgono una massa variabile, come il classico problema del razzo.

F: Non è vero: in realtà un corpo a massa variabile è un sistema e non può essere trattato come un punto materiale. Occorre usare le equazioni cardinali della dinamica, ossia appunto $\vec{F} = d\vec{p}/dt$.

La legge dell'angolo retto ...

Una volta chiarito come trattare le leggi di Newton in meccanica relativistica, rimane prima di tutto da vedere che effettivamente non possiamo mantenere $\vec{p} = m\vec{v}$, e poi capire come modificarla. Un modo assai istruttivo per arrivarci è ragionare sulla "legge dell'angolo retto." Il problema è semplice: l'urto elastico di due palline di massa uguale. La difficoltà nel discorso che sto per fare è che bisogna stare ben attenti alla logica: come vedrete, in partenza non scelgo esplicitamente se stare nell'ambito della meccanica classica o di quella relativistica.

Le fig. 11–5 e fig. 11–6 illustrano la situazione dell'urto. Cominciamo dalla fig. 11–5, che è tracciata nel rif. C del centro di massa. I vettori rappresentano le q. di moto; per il momento assumo di non conoscere la legge che lega q. di moto e velocità. Le sole ipotesi che faccio sono:

- $\vec{p}$ è un vettore parallelo (e concorde) a $\vec{v}$
- il suo modulo, per una particella di data massa, è funzione (crescente) solo del modulo della velocità, e si annulla per $v = 0$
- nell'urto la q. di moto totale si conserva

– l'energia cinetica T, sempre per una particella di data massa, è funzione crescente del modulo della velocità (e si annulla per $v = 0$)
– in un urto elastico l'energia cinetica totale si conserva.

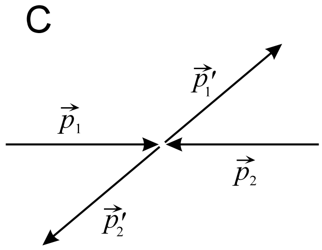


fig. 11–5

Per definizione la q. di moto totale nel rif. del centro di massa è nulla prima dell'urto: allora le velocità delle due palline sono necessariamente opposte (uguali in modulo). Dato che la q. di moto si conserva, sarà nulla anche dopo l'urto. Questo basta per dire che anche dopo l'urto le due velocità sono opposte e di ugual modulo; però potranno aver cambiato direzione, e fin qui non posso escludere che siano cambiati anche i moduli.

Ma il modulo delle velocità non può cambiare, altrimenti cambierebbe l'energia cinetica, che invece si deve conservare. Ne segue che non cambia neppure il modulo della q. di moto di ciascuna particella: cambia solo la direzione. È importante notare *che quanto detto fin qui è vero indipendentemente dalla relatività*: se Tizio è un fisico relativista e Caio è un fisico newtoniano, fin qui Tizio e Caio vanno d'accordo.

Finora stavamo nel rif. C del centro di massa. Ora analizziamo il sistema in un rif. F: quello in cui la particella 2 è inizialmente ferma. In questo caso la q. di moto totale è $\vec{p}_1$, perché $\vec{p}_2 = 0$. Dato che la q. di moto si conserva, sarà $\vec{p}_1 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$, dove ho indicato con $\vec{p}_1'$, $\vec{p}_2'$ le q. di moto dopo l'urto.

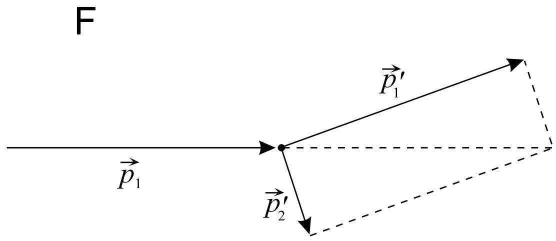


fig. 11–6

Aggiungo ora l'ipotesi che valgano le formule newtoniane: allora $T = p^2/2m$ e la conservazione dell'energia cinetica ci dice

$$p_1^2 = {p_1'}^2 + {p_2'}^2 \tag{11–1}$$

(i fattori $2m$ a dividere si cancellano). Di conseguenza l'angolo fra $\vec{p}_1'$ e $\vec{p}_2'$ è retto.

Riassumendo: secondo la meccanica newtoniana, in un urto fra due particelle uguali, di cui una ferma, se l'urto è elastico *le velocità dopo l'urto sono tra loro ortogonali.*

In realtà posso dire "se e solo se," perché il ragionamento fatto si può invertire: se l'angolo è retto vale il teorema di Pitagora e la (11–1), cioè si conserva l'energia cinetica. Si vede così che la legge dell'angolo retto è intimamente connessa con le leggi newtoniane del moto. Se in un esperimento dovessi trovare che in un urto elastico le particelle escono con un angolo non retto, dovrei concludere che la q. di moto non si conserva, oppure che la relazione fra q. di moto ed energia non è quella newtoniana.

. . . non vale in relatività

E questo è stato fatto: ci sono esperimenti famosi in camera di Wilson, dove si vede che l'urto di due elettroni, di cui uno fermo, produce in uscita traiettorie che formano un angolo acuto. Una considerazione didattica: noi abbiamo fatto disegni, ma si potrebbe fare un esperimento: sul tavolo da biliardo, o meglio su un tavolo a cuscino d'aria, le palle (i dischi) farebbero circa un angolo retto, mentre con gli elettroni questo non è più vero.

Ma perché ho mostrato due figure in due rif. differenti? Per arrivare all'angolo retto il rif. C non mi è servito! Vedremo subito a che cosa serve... Domandiamoci: come si passa dal rif. C a F? Come si trova la velocità nel rif. F a partire da quella nel rif. C? In F la particella 2 è ferma, in C si muove; quindi la velocità di F rispetto a C è $\vec{v}_2$, quella di C rispetto a F è $-\vec{v}_2 = \vec{v}_1$.

Ma se voglio conoscere le velocità in F a partire da quelle in C, devo sapere come trasformare le velocità da un rif. all'altro. Tengo a sottolineare che è improprio parlare di "composizione" delle velocità: è improprio perché le parole si tirano dietro sottintesi, significati che non hanno e poi si finisce per non capire più niente. "Composizione" suggerisce naturalmente la somma di due vettori, e così si trasmette l'idea che l'operazione da fare sia appunto una somma di vettori, cosa che a priori non possiamo dire (e a posteriori risulterà falso in relatività ...).

In effetti noi abbiamo un problema più generale: come si trasforma una grandezza fisica nel passare da un rif. a un altro? In genere le grandezze relative a una stessa situazione, ma misurate in rif. diversi, sono diverse. Il vantaggio di usare la parola *trasformazione* invece di composizione, è che non viene più naturale pensare alla somma delle velocità. Nella fisica newtoniana, grazie al tempo assoluto, si dimostra che la velocità di un corpo nel secondo rif. è la somma della velocità del corpo nel primo rif. più la velocità del primo rif. rispetto al secondo. Ma questa è la meccanica newtoniana: se il tempo non è più assoluto, la dimostrazione non vale più, ma una legge di trasf. (anche se al momento sconosciuta) esiste sempre. Insisto che siamo di fronte a un problema psicologico: usare la parola "composizione" suggerisce la somma. Ma la legge di trasf. può non essere una somma: e infatti si scopre che *non è* una somma!

A parte questo, se assumiamo la legge di trasf. galileiana, allora per passare da C a F dovremo sommare $\vec{v}_1$ a tutte le velocità. L'ho fatto nella fig. 11–7, dove appunto si vede come ricavare le velocità finali in F a partire da quelle in C. Nella figura si vedono i due parallelogrammi che danno le somme vettoriali, e che sono in realtà due rombi, perché i lati sono tutti uguali. Ma in un rombo le diagonali sono perpendicolari, e si ritrova così, per altra via, la legge dell'angolo retto.

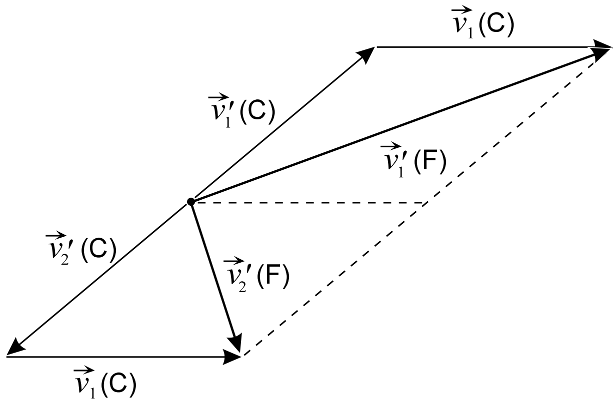


fig. 11–7

Riassumendo: nella meccanica newtoniana la legge di trasf. delle velocità è la somma, e ne segue la legge dell'angolo retto. Se in relatività la legge di trasf. è diversa, dobbiamo essere preparati ad accettare anche una legge diversa per l'angolo dopo l'urto...

La situazione ora è la seguente: in un primo tempo abbiamo dedotto la legge dell'angolo retto dalla conservazione dell'energia cinetica, usando per questa l'espressione

$$T = p^2/2m. \tag{11–2}$$

Successivamente abbiamo visto che la legge dell'angolo retto vale se e solo se accettiamo la trasf. galileiana delle velocità. Allora, se la (11–2) non è giusta non vale la legge dell'angolo retto e non vale neppure la trasf. galileiana delle velocità; viceversa, se non vale la legge galileiana allora l'angolo non sarà retto e non varrà la (11–2) per l'energia.

Ma abbiamo visto che la legge dell'angolo retto non è vera sperimentalmente: quindi non vale la trasf. galileiana delle velocità e $p_1^2 \neq {p_1'}^2 + {p_2'}^2$ anche se l'energia cinetica si conserva. Perciò non può essere $T = p^2/2m$ e ne segue $p \neq mv$. Io non so quale sarà la nuova relazione fra p e v, ma non sarà $p = mv$. Se sapessi come ricavare una delle leggi (ad es. la trasf. delle velocità) allora potrei dedurre le altre, in particolare quella per l'energia. E viceversa: se conosco la relazione per l'energia posso dedurre la trasf. delle velocità.

Quantità di moto e velocità limite

C'è un altro modo assai più semplice per capire che non possiamo mantenere la formula newtoniana $p = mv$. Consideriamo una particella soggetta a una forza costante:

allora da $p = mv$ e $F = dp/dt$ segue $F = ma$, e se F è costante sarà costante anche l'accelerazione. Ma in tal caso la velocità crescerebbe indefinitamente (proporzionale al tempo) e non ci sarebbe nessuna velocità limite.

Se pensiamo per es. a un elettrone, basterebbe una d.d.p. di 250 kV per fargli raggiungere la velocità della luce. Infatti, se E è il campo elettrico uniforme, avremo:

$$F = eE \qquad a = \frac{e}{m}\,E \qquad v = \frac{e}{m}\,Et$$
$$v = c \quad \Rightarrow \quad t = \frac{mc}{eE} \qquad s = \tfrac{1}{2}at^2 = \frac{mc^2}{2eE}$$
$$V = Es = \frac{mc^2}{2\,e}.$$

Dato che per un elettrone $mc^2 \simeq 0.5\,\mathrm{MeV}$, si ottiene appunto $V = 250\,\mathrm{kV}$.

Ma 250 kV non è una differenza di potenziale alta! Tecnicamente si raggiunge senza problemi, quindi sarebbe facile accelerare un elettrone fino a fargli raggiungere velocità superiori a quella della luce. L'esperimento è descritto in uno degli ormai famosi film del PSSC, intitolato appunto *La velocità limite*. Nell'esperimento si ricava il grafico della velocità in funzione della d.d.p. V. Portando V in ascisse e v in ordinate, se valessero le leggi newtoniane avremmo $v \propto \sqrt{V}$; quindi il grafico verrebbe una parabola (con asse coincidente con quello delle ascisse): la velocità crescerebbe sempre, senza limiti.

L'esperimento mostra invece che il grafico ha un asintoto orizzontale per $v = c$: in effetti viene usato un acceleratore lineare, che dà agli elettroni un'energia cinetica di diversi MeV, quindi molto superiore a quella critica che abbiamo calcolata (fig. 11–8).

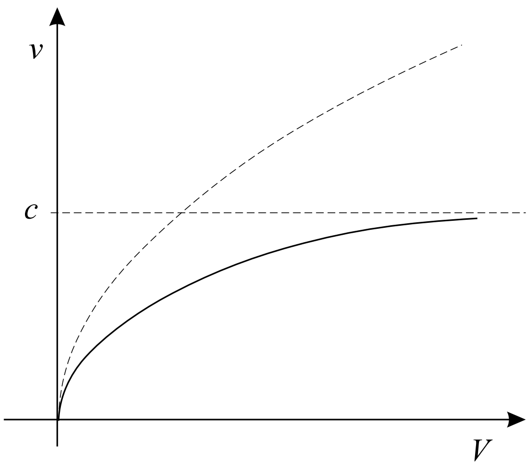


fig. 11–8

Problemi

1. Perché l'esempio delle cariche è "non relativistico"?

2. Una particella si muove di moto circolare uniforme. Note F e p calcolare il periodo.

Attenzione: in meccanica newtoniana è facile, ma qui siamo in meccanica relativistica, e le formule non le abbiamo. Dovete rispondere a questa domanda senza usare le formule della meccanica newtoniana, perché non valgono, né quelle della meccanica relativistica, perché non le sappiamo. Solo utilizzando quello che abbiamo detto oggi. È un ragionamento abbastanza sottile.

3. Quiz a risposta multipla: un elettrone inizialmente fermo viene accelerato per $1\,\mu\mathrm{s}$ in un campo $E = 10^4\,\mathrm{V/m}$. Cosa sappiamo delle condizioni finali?

a) la velocità *b*) lo spazio percorso
c) l'energia *d*) l'impulso
e) nessuna di queste.

N.B. Anche qui è permesso utilizzare solo quanto visto fino ad ora: i tre principi, nella forma che abbiamo detto.

Risposte

Problema 1. (Esempio non relativistico):

Si tratta dell'esempio con cui abbiamo mostrato che il PAR non vale nell'interazione tra due cariche in moto. La domanda è un po' un gioco di parole, ma vale la pena di ragionarci sopra.

Dicendo che l'esempio è non relativistico, ho pensato prima di tutto al punto di vista storico: il problema del campo (elettrico e magnetico) prodotto da una carica in moto non solo può essere trattato senza conoscere la relatività, ma di fatto è stato affrontato e risolto prima della nascita della relatività.

Si potrebbe però assumere un punto di vista diverso, osservando che le equazioni di Maxwell sono *intrinsecamente relativistiche* (infatti sono invarianti per trasf. di Lorentz, non di Galileo) e quindi l'accidente storico è irrilevante: nella sostanza il problema *è* relativistico, anche se i fisici della fine dell'800 non se n'erano ancora accorti...

Un altro argomento che si potrebbe portare è il seguente: nella situazione descritta dal problema non occorre l'ipotesi che le velocità delle cariche siano dell'ordine di c; le cose vanno allo stesso modo per qualunque velocità.

Questo è vero, però occorre anche tener presente che la violazione del PAR è dovuta alla forza di Lorentz che il campo magnetico prodotto da B esercita su A. Tale forza è proporzionaale alla velocità di A, ma anche alla velocità di B perché il campo magnetico è esso stesso proporzionale a quella velocità. Dunque l'effetto va col prodotto delle due velocità, e facendo i calcoli in dettaglio si vede che la forza responsabile della non validità del PAR sta alla forza dovuta al campo elettrico nel rapporto v^2/c^2.

In questo senso l'effetto è relativistico, perché è di secondo ordine in v/c, come tutti gli altri effetti relativistici: dilatazione del tempo, deviazioni da $F = ma$, ecc.

Problema 2. (Moto circolare uniforme):

Cominciamo con l'osservare che $\vec{p}$ sarà certamente parallelo a $\vec{v}$, e che nel moto circolare uniforme per definizione anche il modulo di $\vec{p}$, come quello di $\vec{v}$, resta costante. È quindi facile calcolare il modulo di $d\vec{p}/dt$, con una proporzione dedotta dai triangoli simili in fig. 11–9:

$$|d\vec{p}/dt| : |\vec{p}| = |d\vec{v}/dt| : |\vec{v}|.$$

Noi conosciamo $|d\vec{v}/dt|$, che vale v^2/r (notate che questa legge è tanto newtoniana quanto relativistica, o meglio non è né newtoniana né relativistica, ma solo cinematica!). Pertanto

$$\left|\frac{d\vec{p}}{dt}\right| = \frac{vp}{r} = \omega p.$$

Ma $|d\vec{p}/dt| = F$, e arriviamo a

$$F = \omega p, \quad \omega = F/p, \quad T = \frac{2\pi p}{F}$$

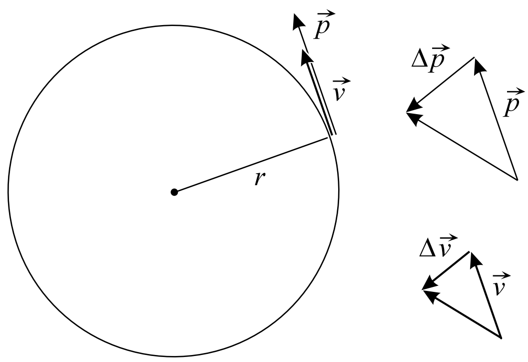


fig. 11–9

che risolve il problema (ora T è il periodo).

Per una particella carica in un campo magnetico ortogonale alla traiettoria avremo $F = evB$, da cui

$$eBr = p \tag{11–3}$$

che è interessante perché mostra che se non sappiamo realizzare campi oltre un certo B, per accrescere p siamo costretti ad aumentare r in proporzione: ecco una ragione per cui gli acceleratori sono sempre più grandi (ce n'è anche un'altra: l'aumento di r serve a ridurre la potenza perduta per irraggiamento dalla carica accelerata, che a parità di p va come $1/r^2$).

È anche interessante una conseguenza dell'esistenza di una velocità limite: per un acceleratore di raggio assegnato, al crescere di p (e anche dell'energia) la velocità tende a c, e quindi il periodo tende anch'esso a un limite $2\pi r/c$. Perciò gli impulsi che danno energia alle particelle (non possiamo più dire che le "accelerano"!) andranno dati a una frequenza crescente, che tende a un limite costante. È per questa ragione che si parla di "sincrotroni." Però la (11–3) mostra che se cresce p deve crescere B; d'altra parte è necessario tenere le particelle in un'orbita fissata, perché debbono viaggiare in un tubo vuoto: ne segue che occorre aumentare il campo magnetico che le fa girare in tondo, man mano che l'impulso aumenta.

Problema 3. (Quiz a risposta multipla):

È dato il campo elettrico, quindi la forza, e il tempo per cui agisce. Il secondo principio ci dice che è noto l'impulso finale, che vale $p = eEt$. Non possiamo ricavare da qui la velocità, anche conoscendo la massa dell'elettrone, perché non ci è (ancora) nota la relazione tra p e v. Per la stessa ragione non possiamo dire quanto vale l'energia, non avendo ancora trovato la relazione tra energia e impulso.

Neppure lo spazio ci è noto: lo potremmo ricavare integrando la velocità, che però non conosciamo. Oppure potremmo trovarlo dal teorema delle forze vive, dato che il lavoro della forza sarà $L = eEs$, se ci fosse nota la variazione di energia.

Dunque la risposta corretta è la d).

LEZIONE 12

L'impulso relativistico

Il nostro obbiettivo in questa lezione è di arrivare alla relazione relativistica fra impulso e velocità, che sostituirà la $p = mv$ newtoniana. Per arrivarci, adotteremo due criteri:

1) deve trattarsi di una grandezza che si conserva negli urti
2) per piccole velocità deve ridursi alla forma newtoniana.

Il secondo criterio non è che il *principio di corrispondenza* adattato alla relatività. La storia del principio di corrispondenza nasce con la meccanica quantistica: si richiedeva che la nuova meccanica dovesse riprodurre quella classica al limite in cui la costante di Planck diventava trascurabile (sistemi meccanici con azione $\gg h$).

Ma il principio di corrispondenza è un criterio metodologico generale: una nuova teoria, che si presenta come generalizzazione di una vecchia a casi in cui la vecchia non funziona, deve includere questa come caso limite. Nel nostro caso il parametro che definisce il caso limite è la velocità del corpo: se questa è molto piccola rispetto a c gli effetti relativistici sono trascurabili e la nuova meccanica deve riportarsi a quella newtoniana.

Si può dimostrare (ma la dimostrazione non è banale) che i due criteri determinano p, e si trova

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau}. \tag{12–1}$$

Non sembra consigliabile dimostrare questa formula, ma è giusto far sapere che si tratta di un teorema. (Solo per vostra informazione, ne trovate una dimostrazione alla fine di questa lezione.) Da un punto di vista pratico, possiamo appoggiarci su una quantità ormai sterminata di prove sperimentali (v. dopo) per cui è del tutto lecito presentarla come una formula ampiamente verificata su base sperimentale, oltre che come teorema.

È ovvio che la (12–1) si riduce alla forma newtoniana quando v è piccola, perché allora $d\tau$ si riduce a dt. È altrettanto ovvio che per qualsiasi velocità non nulla $p \neq mv$: è a questo punto che nasce la famigerata "massa relativistica."

A dire il vero, qualunque formula io possa inventare per $p(v)$, e non solo la (12–1), la potrò sempre scrivere $p = mv$. Basterà dare un'opportuna definizione di m, che sarà funzione di v, invece di essere costante come nel caso newtoniano. Non c'è in questo niente di men che lecito: se ho cambiato la definizione dell'impulso, perché non potrei cambiare quella della massa? Ma io non la voglio cambiare, e ne discuteremo in seguito le ragioni.

Però nella (12–1) compare m e occorre quindi sapere che cosa intendo per m. La risposta è semplice: continuo a chiamare massa quella newtoniana. Che cosa si fa per conoscere la massa? Per pesare un corpo occorre la forza di gravità, che non è sempre presente (anzi non c'è per definizione in un RI). L'alternativa è di usare $F = ma$, mantenendo piccola la velocità. Questo è sempre possibile: parto dal corpo in quiete, gli applico una forza nota, e misuro l'accelerazione. So che fino a quando la velocità non cresce troppo la meccanica newtoniana va bene, e me ne servo per definire la massa.

Dunque *quando parlo di massa intendo quella misurata con la meccanica newtoniana, a piccole velocità*. Anche per misurare la massa dell'elettrone si utilizzano esperimenti dove la velocità dell'elettrone è piccola: esistono esperimenti classici (probabilmente ne conoscete la versione didattica) in cui si fa percorrere agli elettroni una traiettoria circolare in campo magnetico e se ne ricava il rapporto e/m dalla misura del raggio. Se la carica è nota per altra via (Millikan) si ottiene la massa. Quanto più voglio essere preciso tanto più la velocità dovrà essere piccola, ma questa non è una difficoltà teorica, anche se porrà qualche problema dal punto di vista sperimentale.

Per mettere in evidenza che la massa è misurata su corpi fermi o quasi, qualcuno dice "massa a riposo" o "massa di quiete"; io preferisco non usare questi termini, perché se parlo di massa a riposo lascio intendere che esista anche qualche altro tipo di massa, e invece *di massa ce n'è una sola.*

È invece importante rilevare che *la massa è invariante*: la sua definizione non dipende dal rif. Infatti, quale che sia il rif. nel quale stiamo operando, per misurare la massa dobbiamo sempre trasferirci a quel particolare rif. in cui la particella è ferma. Ne segue che il risultato sarà sempre lo stesso, indipendentemente dal rif. in cui vorremo calcolare o misurare l'impulso (e l'energia, v. dopo).

Converrà per il seguito riscrivere la (12–1) in altri modi equivalenti. Il primo è banale: se introduco le componenti cartesiane del vettore posizione $\vec{r}$, ossia le coordinate (x, y, z), posso scrivere:

$$p_x = m\,\frac{dx}{d\tau} \qquad p_y = m\,\frac{dy}{d\tau} \qquad p_z = m\,\frac{dz}{d\tau}\,.$$

Questa forma è utile per es. quando il moto si svolge su una retta: infatti una sola componente (ad es. la prima) è sufficiente.

Una seconda forma della (12–1) si trova ricordando che $d\tau = dt/\gamma$ (col solito significato di γ). Infatti

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\,\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{d\tau} = m\,\vec{v}\,\gamma = \frac{m\,\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \qquad (12\text{–}2)$$

Dalla (12–2) nasce la tentazione di ripristinare $\vec{p} = m'\vec{v}$, con $m' = m\gamma$ (la "massa relativistica," appunto). Non seguirò quest'usanza, anzi vi mostrerò la prossima volta quanto sia sconsigliabile.

L'impulso relativistico e il secondo principio

Notate che per arrivare alla forma relativistica dell'impulso non abbiamo fatto uso del secondo principio, ma solo della conservazione e del principio di corrispondenza. Dovremmo ora verificare che con l'espressione data di $\vec{p}$ vale realmente il secondo principio, nella forma $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. Ma in molti casi qui si nasconde una difficoltà: come misurare $\vec{F}$?

Nei casi in cui ha davvero importanza la relatività (fisica delle particelle) non disponiamo di una misura indipendente di forza: non possiamo attaccare un dinamometro a un elettrone! Diventa quindi necessario interpretare la seconda legge come una *definizione dinamica di forza*: la forza diviene una misura del *tasso di trasferimento di q. di moto* fra due corpi. Quando due corpi interagiscono, si scambiano q. di moto (eventualmente attraverso l'intermediario di un campo). Il PAR newtoniano viene visto, nella fisica einsteiniana, come la manifestazione di un flusso di q. di moto fra due o più corpi (fig. 12–1): la q. di moto si conserva sempre, ma viene trasferita da un corpo all'altro. La misura di questo trasferimento (q. di moto trasferita per unità di tempo) è ciò che siamo abituati a chiamare *forza.*

C'è però un'importante eccezione alla difficoltà di misurare per via indipendente la forza, ed è l'interazione e.m. La ragione è che campi elettrici e magnetici possono essere generati in modo macroscopico e applicati anche a particelle relativistiche (v. l'esempio del moto in campo magnetico, dato sopra). È quindi possibile verificare che $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, con $\vec{F}$ data dalle espressioni classiche dell'elettromagnetismo, descrive correttamente le variazioni di q. di moto per una particella carica in un campo elettrico o magnetico.

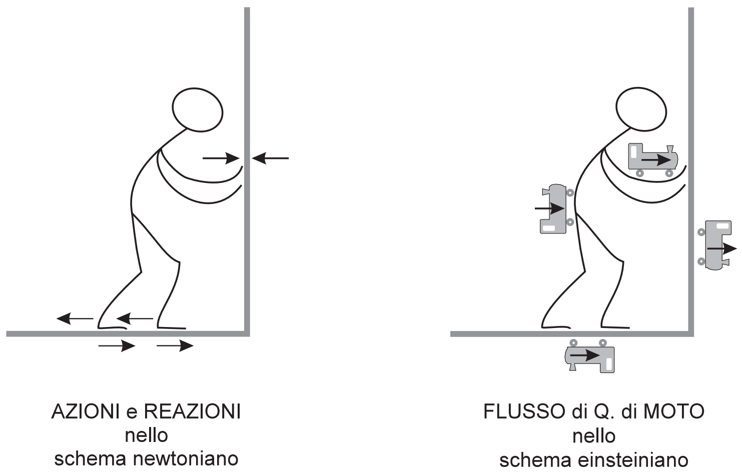


fig. 12–1

Anche qui le verifiche sono note e abbondanti; anzi, hanno costituito la prima indicazione che qualcosa non andava con la meccanica newtoniana applicata agli elettroni (esperimenti di Abraham e altri agli inizi del secolo).

L'energia

Sistemato l'impulso, passiamo ora a definire l'energia. La definizione è questa:

$$E = m\,c^2\,\frac{dt}{d\tau}. \tag{12–3}$$

La definizione è per ora arbitraria, e non dovremmo neppure chiamarla "energia" finché non ne avremo studiate le proprietà. Si vede subito una certa analogia con la (12–1): a parte il fattore c^2, qui abbiamo t al posto di $\vec{r}$.

Per procedere, fissiamo un certo istante, e scegliamo le coordinate in modo che a quell'istante la velocità sia diretta lungo l'asse x: sarà quindi $v_y = v_z = 0$, $p_y = p_z = 0$. Scriviamo una accanto all'altra la (12–3) e la prima delle (12–2) moltiplicata per c:

$$E = m\,c^2\,\frac{dt}{d\tau} \qquad c\,p_x = m\,c\,\frac{dx}{d\tau}.$$

Quadrando e sottraendo la seconda dalla prima:

$$E^2 - c^2 p_x^2 = m^2 c^4\,\frac{dt^2 - dx^2/c^2}{d\tau^2}. \tag{12–4}$$

Ma conosciamo la relazione

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2/c^2,$$

e con questa, ricordando che $p_y = p_z = 0$, per cui $p_x^2 = p^2$, la (12–4) diventa subito

$$E^2 - c^2 p^2 = m^2 c^4. \tag{12–5}$$

Proprietà dell'energia relativistica

La (12–5) è forse la relazione più importante della dinamica relativistica (certo più importante delle formule che danno p o E in funzione di v). Discutiamola a fondo.

1. Il secondo membro della (12–5) è per definizione un *invariante* (non dipende dal rif.). Infatti la massa è stata definita in modo invariante, come abbiamo già visto. Dunque

anche il primo membro della (12–5) è un invariante, mentre E e p certamente non lo sono. Ciò vuol dire che se studiamo la stessa particella in due diversi rif., in generale troveremo valori diversi (E, p), (E', p') per energia e impulso, ma sarà sempre

$$E^2 - c^2p^2 = {E'}^2 - c^2{p'}^2. \tag{12–6}$$

2. In particolare, nel *rif. di quiete* della particella, quando $p = 0$, la (12–5) ci dà $E = mc^2$: l'energia di una particella *ferma* è proporzionale alla sua massa. Se invece $p \neq 0$, la (12–5) mostra che

$$E = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2}$$

che è funzione crescente di p; se poi $p \ll mc$ lo sviluppo al primo ordine dà

$$E = mc^2 + p^2/2m,$$

che comincia a fornire qualche indizio sul significato di E...

3. La (12–5) può essere usata per misurare la massa di una particella anche quando questa non è ferma: basta conoscere E e p. In pratica è ciò che si fa quando non è facile fermare una particella, per es. perché è instabile.

4. Sempre dalla (12–5) si vede che non c'è niente di strano se la massa è nulla: ciò vuole solo dire che la (12–5) diventa $E = c\,p$. Viceversa, se la misura di E e di p mostra che $E = c\,p$, ne segue che la massa è nulla.

Dalle definizioni (12–1), (12–3) di p e di E:

$$\frac{\vec{p}}{E} = \frac{d\vec{r}}{c^2dt} = \frac{\vec{v}}{c^2}. \tag{12–7}$$

Ne segue che se la massa è nulla ($E = c\,p$) necessariamente $v = c$, in ogni rif. Una particella di massa nulla *ha sempre velocità c*, e *non ha rif. di quiete.*

Non è irrilevante che le misure saranno in generale affette da incertezze, per cui non si potrà facilmente dire che la massa è proprio nulla, ma solo che lo è "entro gli errori." In casi estremi la misura può essere molto difficile: l'esempio canonico è quello dei neutrini, per i quali a tutt'oggi il problema della massa nulla o no è da considerarsi aperto.

Osservazione didattica: "massa" nel senso comune viene spesso associata a "sostanza," o a "materia," per cui dire "massa nulla" viene spesso inteso come se significasse "immateriale." Non a caso si dice spesso che i fotoni sono "pura energia"! È bene insistere che qui m è una grandezza fisica, con un preciso significato, ma senza le connotazioni filosofiche (metafisiche?) che sono abituali per il termine "massa."

5. La (12–5) vale istante per istante mentre la particella si muove, anche se p ed E cambiano (es. un elettrone accelerato da un campo elettrico). In questo senso posso dire che la massa è una *costante del moto*; e non bisogna confondere "costante del moto" con "invariante," sebbene la massa abbia entrambe le proprietà.

Fra due tempi diversi avrò

$$E_1^2 - c^2p_1^2 = E_2^2 - c^2p_2^2$$

e da questa:

$$(E_1 - E_2)\,(E_1 + E_2) = c^2(p_1 - p_2)\,(p_1 + p_2) \tag{12–8}$$

$$E\,\Delta E = c^2p\,\Delta p. \tag{12–9}$$

Si passa dalla (12–8) alla (12–9) supponendo piccolo l'intervallo di tempo, in modo che E_1 differisca poco da E_2 e p_1 differisca poco da p_2. Ovvero, si ottiene l'equivalente della (12–9) direttamente, differenziando la (12–5):

$$E\,dE = c^2 p\,dp.$$

Da questa con la (12–7), se per es. il moto è lungo x, si ha

$$dE = v\,dp = vF\,dt = F\,dx$$

(ho usato il secondo principio: $dp = F\,dt$). Ma $F\,dx$ è il lavoro dL, e arriviamo quindi a

$$dE = dL$$

che ricorda il teorema delle forze vive: la grandezza E (ricordate, per ora senza significato fisico!) varia durante il moto nella stessa misura del lavoro fatto dalla forza agente sul corpo.

Sembra dunque ragionevole associare E all'energia cinetica T, ma c'è un piccolo problema. Una definizione relativistica di T, per quanto arbitraria come tutte le definizioni, dovrà conservare, nella misura del possibile, le proprietà già note per T dalla meccanica newtoniana. Una è appunto il teorema delle forze vive; l'altra è che $T = 0$ per $v = 0$. Invece abbiamo visto sopra che quando $v = 0$, E vale $m\,c^2$.

Ma la soluzione è semplice: basta definire $T = E - m\,c^2$, ossia

$$E = m\,c^2 + T.$$

Abbiamo dunque l'interpretazione fisica di E: essa misura l'energia cinetica relativistica, più la costante additiva $m\,c^2$. Siamo abituati, dalla fisica newtoniana, che l'energia è spesso definita a meno di una costante additiva; ma vedremo poi che qui la costante è tutt'altro che arbitraria, anzi ha un profondo significato, ed è questo uno dei cambiamenti che la relatività produce nella dinamica.

6. La (12–3) si può scrivere $E = m\,c^2\gamma$, per cui

$$T = m\,c^2(\gamma - 1). \tag{12–10}$$

La (12–10) può essere sottoposta a verifica sperimentale. Un esempio si vede nel già citato film PSSC sulla velocità limite: si accelerano degli elettroni in un acceleratore lineare, e si misurano due cose (fig. 12–2):

a) la velocità, dal tempo di volo fra due traguardi

b) l'energia cinetica, dal riscaldamento di un bersaglio in cui gli elettroni vengono frenati.

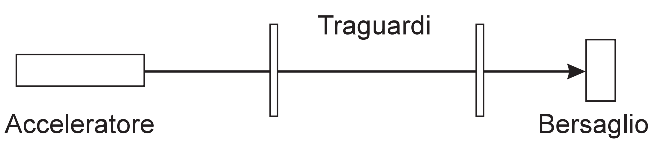


fig. 12–2

È così possibile constatare che l'energia cinetica, misurata per via calorimetrica, coincide con quella ricavata dalla velocità mediante la (12–10), mentre si scosta nettamente dalla formula newtoniana.

Se si studia un urto elastico fra particelle di ugual massa, già sappiamo che non varrà la legge dell'angolo retto. Però dalla misura degli angoli si può ugualmente verificare che energia e impulso si conservano. In modo più complicato, la stessa cosa si fa anche se le masse non sono uguali. Da quando esiste la fisica delle alte energie, si contano ormai a milioni le verifiche sperimentali così ottenute.

Considerazioni didattiche

Vorrei ora commentare le ragioni per la scelta fatta, d'introdurre l'energia per una strada piuttosto formale. Una motivazione che potrei definire "sotterranea" è quella di presentare parallelamente due grandezze che poi (detto *inter nos*) formano il quadrivettore impulso-energia. Con ciò non propongo d'introdurre i quadrivettori: cerco solamente di trasmettere l'idea sottintesa senza enunciarla apertamente. Scrivere sulla stessa riga le definizioni di $\vec{p}$ e di E

$$\vec{p} = m\,\frac{d\vec{r}}{d\tau} \qquad E = m\,c^2\,\frac{dt}{d\tau}$$

è un modo per far vedere che c'è una parentela, anche senza dirlo.

Si potrebbe pensare di partire dal risultato delle deduzioni, cioè $dE = dL$ (che è un requisito abbastanza ragionevole) e da $\vec{p} = m\,d\vec{r}/d\tau$, per arrivare all'espressione dell'energia. C'è tuttavia una difficoltà: come giustificare $E_0 = mc^2$? Se parto da $dE = dL$, per arrivare all'energia debbo aggiungere la costante mc^2; altrimenti ho solo l'energia cinetica, che è molto meno espressiva appunto perché non rappresenta la componente temporale del quadrivettore.

D'altra parte è importante che a questo mc^2 si arrivi nella maniera più naturale possibile; che non esca fuori dal cappello del prestigiatore. Si può obiettare che anche la definizione di E da cui siamo partiti esce fuori dal cappello: è vero, però si scopre immediatamente la relazione (12–5), che è interessante e si ricorda facilmente; e poi si va avanti.

In linea generale non trovo scandaloso introdurre una grandezza di cui non si conosce ancora il significato: probabilmente se ci pensassimo un po' scopriremmo che ci sono altri casi in cui si fa la stessa cosa. Oserei anzi dire che sarebbe opportuno che l'insegnamento scientifico prospettasse i diversi approcci, perché anche nel fare scienza le due strade si alternano: talvolta si usa un argomento formale, altre volte si segue la via dell'induzione dall'esperimento. Non mi sembra giusto asserire che la via corretta sia una sola, e insegnare solo quella; si tratta di essere equilibrati, di non esagerare in un verso o nell'altro. Occorre inoltre capire quando un approccio formale è possibile senza perdere di vista il significato di quello che si fa; e questo è certamente un problema didattico.

Un altro punto che vale la pena di discutere è quello dei prerequisiti, che forse per l'energia sono più pesanti che nel resto di questo progetto.

Cominciamo col dire che il problema dei prerequisiti si può anche capovolgere, trasformandolo in problema delle motivazioni. Intendo dire che l'avere in vista un obbiettivo significativo — e forse attraente — come la relatività, può dare sia all'insegnante, sia anche agli studenti, una motivazione maggiore per affrontare e cercare di capire alcune parti iniziali della fisica. Abbiamo già visto questo a proposito della caduta dei gravi. Se facciamo vedere che con la caduta dei gravi non solo si capisce Galileo, ma si dà anche la necessaria premessa per capire Einstein e l'idea fondamentale della RG, allora il suo studio acquista un ruolo un po' più alto che non quello tradizionale di un capitolo di meccanica, utile soprattutto per dare problemi accessibili…

In un progetto che abbia un carattere integrato, nel quale si sappia fin da principio dove si vuole arrivare, alcune cose si possono anche anticipare: non è necessario trattare certi argomenti solo alla fine del corso, perché servono per la relatività. Una discussione del PR si farà all'inizio della meccanica; ma la si farà in tutt'altro modo se dovrà essere richiamata in queste occasioni, che non se resta un argomento staccato, che nel seguito del corso entra abbastanza poco. In fondo una ragione non secondaria per introdurre la relatività in un corso di fisica è che arricchisce di motivazioni la parte introduttiva della meccanica.

Dimostrazione della (12–2)

A titolo di esercizio ritengo utile presentare la dimostrazione cui ho accennato sopra, sebbene la si trovi in tutti i libri. Questo perché di solito la si fa appoggiandosi sulle trasf. di Lorentz; è perciò opportuno far vedere, anche su questo esempio, che delle trasf. di Lorentz si può fare completamente senza.

Vogliamo dimostrare che la (12–2) è l'unica espressione compatibile con le condizioni:

a) la conservazione dell'impulso vale in qualsiasi RI;

b) l'espressione dell'impulso si riduce a quella newtoniana a piccole velocità.

Stranamente, la dimostrazione è assai più semplice se si considerano moti in almeno due dimensioni, e perciò così faremo.

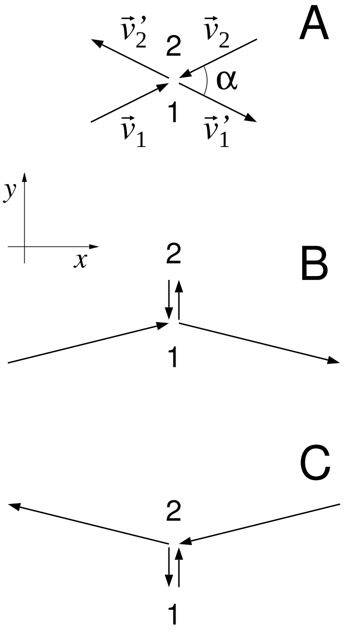


fig. 12–3

Prenderemo in esame un urto elastico tra due particelle di uguale massa, che indicherò con 1 e 2, e lo studieremo da tre rif. (fig. 12–3). Il primo, che chiamerò A, è quello del centro di massa, dove l'impulso totale è nullo, per cui le due particelle hanno velocità e impulsi opposti, sia prima sia dopo l'urto. Il carattere elastico dell'urto ci assicura inoltre che le velocità (e perciò gli impulsi) non cambiano modulo nell'urto, ma soltanto direzione. Supporremo inoltre che l'urto sia *radente*, cioè che anche il cambiamento di direzione (l'angolo α in figura) sia molto piccolo: vedremo poi lo scopo di questa ipotesi, e potremo anche precisarla meglio. Osservate che scelti gli assi cartesiani come in figura, le componenti x delle velocità non cambiano nell'urto, mentre quelle y s'invertono.

Il rif. B è quello in cui la particella 2 ha nulla la componente x della velocità: in altre parole B accompagna la particella 2 secondo l'asse x. Invece C è il rif. in cui si annulla la componente x della velocità di 1: è chiaro che B e C sono in situazione simmetrica rispetto alle due particelle, e questa simmetria sarà usata in modo essenziale nel seguito. L'ipotesi di urto radente comporta che nel rif. B la velocità di 2 sia molto piccola: la supporremo non relativistica, in modo da poter usare l'espressione newtoniana dell'impulso.

E ora precisiamo le notazioni: gli indici $_1$ e $_2$ in basso rappresentano le due particelle; le grandezze dopo l'urto saranno designate da apici, quelle prima dell'urto senza apice. Abbiamo dunque nel rif. B, se v_2 indica il modulo della velocità della particella 2:

$$p_{2y} = -mv_2, \quad p'_{2y} = mv_2,$$
$$p'_{2y} - p_{2y} = 2mv_2,$$
$$(p'_{2x} = p_{2x} = 0).$$

La conservazione dell'impulso impone perciò

$$p'_{1y} - p_{1y} = -2mv_2,$$
$$p'_{1x} = p_{1x};$$

ne segue

$$p_{1y} = mv_2, \quad p'_{1y} = -mv_2.$$

Seguiamo il moto della particella 1 per un intervallo di tempo Δt_1 dopo l'urto: se Δs_1 è il suo spostamento, avremo

$$\frac{\Delta y_1}{\Delta s_1} = \frac{p_{1y}}{p_1} = \frac{mv_2}{p_1}$$

da cui:

$$p_1 = mv_2 \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1} = m \frac{\Delta y_2}{\Delta t_2} \frac{\Delta s_1}{\Delta y_1}\,, \tag{12–11}$$

dove Δy_2 è lo spostamento di 2 (secondo l'asse y) in un intervallo qualsiasi Δt_2. Se scegliamo Δt_2 in modo che sia $\Delta y_2 = \Delta y_1$, l'espressione (12–11) si semplifica:

$$p_1 = m \frac{\Delta s_1}{\Delta t_2} = mv_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2}\,. \tag{12–12}$$

Ai due tempi Δt_1, Δt_2 corrisponderanno per le due particelle i tempi propri dati da:

$$\Delta\tau_1 = \Delta t_1^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_1^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2} \tag{12–13}$$

$$\Delta\tau_2 = \Delta t_2^{\mathrm{B}} \sqrt{1 - \left(v_2^{\mathrm{B}}\right)^2/c^2} \simeq \Delta t_2^{\mathrm{B}} \tag{12–14}$$

dove l'indice $^{\mathrm{B}}$ in alto ricorda il riferimento, e ho fatto uso del fatto che $v_2^{\mathrm{B}} \ll c$ per ipotesi.

Nel riferimento C i ruoli di 1 e 2 si scambiano; avremo perciò $\Delta t_1^{\mathrm{C}} = \Delta t_2^{\mathrm{B}}$ mentre per la simmetrica della (12–14):

$$\Delta\tau_1 = \Delta t_1^{\mathrm{C}}.$$

Dunque è anche $\Delta\tau_1 = \Delta t_2^{\mathrm{B}}$. Confrontando con la (12–14)

$$\Delta\tau_1 = \Delta\tau_2$$

e da (12–13), (12–14) si ottiene infine

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}$$

(l'indice $^{\mathrm{B}}$ è ormai sottinteso). Sostituendo nella (12–12) si arriva al risultato finale:

$$p_1 = \frac{mv_1}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}\,.$$

Abbiamo visto che la (12–2) è la sola forma possibile per l'impulso; occorrerebbe ancora dimostrare che in realtà l'impulso così definito si conserva in generale, e non solo nei casi particolari considerati; ma ciò va al di là dei nostri scopi attuali. Mi limito a ricordare che la dimostrazione diventa immediata appena s'introduce l'energia, e si scoprono le proprietà di trasf. d'impulso ed energia per cambiamenti di rif.

Problemi

1. Un fascio collimato di elettroni, emessi da un preparato radioattivo β, attraversa una regione in cui sono presenti un campo E e un campo B, uniformi, tra loro paralleli, e ortogonali alla velocità iniziale degli elettroni. Il fascio raggiunge poi uno schermo fluorescente.

Studiare il luogo delle tracce sullo schermo al variare di v

a) assumendo la meccanica newtoniana

b) usando la forma relativistica di $p(v)$.

2. Sembra che i neutrini abbiano masse dell'ordine di 0.01 eV. Se abbiamo neutrini di energia ∼1 MeV, con che precisione occorre misurare E e p per conoscere m entro il 10%?

3. Un acceleratore lineare lungo 5 metri fornisce un fascio di elettroni di energia cinetica 2 MeV. La corrente è 1 μA. Gli elettroni colpiscono un blocchetto di rame di massa 100 grammi, per 10 secondi.

Calcolare:

a) la variazione di temperatura del blocchetto
b) la velocità degli elettroni
c) la distanza media, all'uscita dell'acceleratore
d) il campo elettrico medio nell'acceleratore (perché medio?)
e) il tempo di permanenza di un elettrone nell'acceleratore.

4. In un urto elastico fra due particelle uguali, di cui una ferma, si osserva che gli angoli dopo l'urto sono uguali (fig. 12–4). Calcolare la relazione fra p iniziale e ϑ (la massa è nota).

5. Riesaminare il paradosso del condensatore (lez. 4) e spiegare con le leggi della dinamica relativistica perché la velocità orizzontale dell'elettrone non è costante nel rif. K.

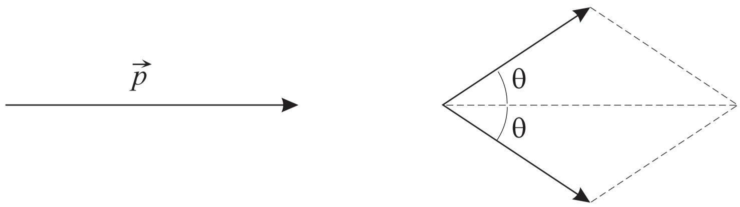


fig. 12–4

6. In un certo RI, che diremo K, un fotone ha energia ε. Si chiede che energia avrà il fotone in un secondo RI, diciamo K′, che si muove rispetto a K nella stessa direzione e verso del fotone, con velocità v.

Risposte

Problema 1. (Fascio di elettroni):

È importante tener presente in primo luogo che gli elettroni emessi nei decadimenti β hanno uno spettro continuo di energie, che va da 0 a un massimo. Lo stesso accade quindi per le velocità.

Prendiamo l'asse z nella direzione e verso della velocità iniziale degli elettroni, l'asse x secondo i campi, l'asse y di conseguenza. Sia a la lunghezza della regione dove sono presenti i campi, in direzione z; l la distanza tra la fine dei campi e lo schermo.

L'equazione del moto in forma vettoriale si scrive:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + e\,\vec{v} \times \vec{B}$$

(in questa forma è valida sia in meccanica newtoniana, sia in meccanica relativistica). In componenti:

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= \quad eE \\ \frac{dp_y}{dt} &= \quad eBv_z \\ \frac{dp_z}{dt} &= -eBv_x. \end{aligned} \tag{12–15}$$

Una soluzione esatta è complicata; limitiamoci quindi al caso in cui la deflessione è piccola, il che vuol dire che nella terza delle (12–15) si può trascurare il secondo membro e supporre quindi p_z costante (e così anche v_z).

Attenzione: costante per il singolo elettrone, ma diversa dall'uno all'altro.

Allora le prime due ci danno

$$\begin{aligned} p_x &= eE\Delta t = \frac{eEa}{v_z} \\ p_y &= eBv_z\Delta t = eBa \end{aligned} \tag{12–16}$$

se $\Delta t = a/v_z$ è il tempo che l'elettrone trascorre nel campo.

Dopo attraversato il campo, la traiettoria degli elettroni è rettilinea e obliqua rispetto all'asse z. Se $a \ll l$, possiamo trascurare la deviazione del fascio dentro il campo; allora gli spostamenti nelle due direzioni x, y valgono:

$$x = l\,\frac{v_x}{v_z} \qquad y = l\,\frac{v_y}{v_z}. \tag{12–17}$$

A questo punto bisogna cominciare a distinguere. Nel caso newtoniano $\vec{p} = m\vec{v}$, quindi

$$x = l\,\frac{eEa}{mv_z^2} \qquad y = l\,\frac{eBa}{mv_z}.$$

Eliminando v_z si trova

$$x = \frac{m}{e\,a\,l}\,\frac{E}{B^2}\,y^2 \tag{12–18}$$

ossia una parabola.

Per trattare il caso relativistico dovremo usare per p_x, p_y le espressioni

$$p_x = m\gamma v_x \qquad p_y = m\gamma v_y$$

dove a rigore γ va espresso usando il modulo della velocità. Però nell'approssimazione che abbiamo fatto (piccola deflessione) sarà anche $v_x, v_y \ll v_z$ e quindi potremo assumere

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_z^2/c^2}}.$$

Le (12–16) si scrivono

$$m\gamma v_x = \frac{eEa}{v_z} \qquad m\gamma v_y = eBa$$

e usando le (12–17) per eliminare v_x, v_y:

$$\gamma v_z^2 = \frac{eEa\,l}{mx} \qquad \gamma v_z = \frac{eBa\,l}{my}.$$

Eliminando v_z si arriva infine a

$$x^2 = \left(\frac{E}{cB}\right)^2 y^2 + \left(\frac{mE}{e\,a\,lB^2}\right)^2 y^4 \tag{12–19}$$

(a essere precisi, bisognerebbe scrivere $x =$ la radice quadrata positiva del secondo membro). Si vede che la (12–19) si riduce alla (12–18) se $y \gg (eBa\,l)/(mc)$, ossia se gli elettroni sono abbastanza lenti.

La differenza geometrica tra la (12–18) e la (12–19) è che mentre la prima è una curva tangente nell'origine all'asse y, le tangenti alla seconda sono invece le rette $x = \pm ey/cB$. Gli esperimenti di Abraham e altri misero appunto in luce questa differenza.

Problema 2. (Neutrini):

Basta partire dalla solita $E^2 - c^2p^2 = m^2c^4$ e differenziare:

$$E\,dE - c^2p\,dp = mc^4 dm.$$

Data l'energia dei neutrini, praticamente $E = cp$, quindi

$$mc^4 dm = E\,(dE - c\,dp)$$

da cui, dividendo per m^2c^4:

$$\frac{dm}{m} = \frac{E}{m^2c^4}\,(dE - c\,dp) = \frac{E^2}{m^2c^4}\left(\frac{dE}{E} - \frac{dp}{p}\right).$$

Coi dati del problema $E^2/(m^2c^4) = 10^{16}$, e si vede che per avere $\delta m/m = 0.1$ sarebbero necessari $\delta E/E$ e $\delta p/p$ dell'ordine di 10^{-17}.

Problema 3. (Acceleratore lineare):

In un acceleratore lineare le particelle non vengono accelerate da un campo elettrico uniforme: in realtà il campo è presente solo in piccole sezioni del tubo. Essendo data l'energia cinetica finale degli elettroni, conosciamo il lavoro $L = 2\,\mathrm{MeV}$ fatto dal campo, che sarà

$$L = e\int_0^l E(x)\,dx = el\bar{E} \tag{12–20}$$

dove $l = 5\,\mathrm{m}$ è la lunghezza del tubo, $\bar{E}$ la media del campo lungo il tubo.

a) Abbiamo $I = ne$, con $I = 1\,\mu\mathrm{A}$, n numero di elettroni per unità di tempo. Dato che ogni elettrone cede al blocchetto l'energia L, la potenza ceduta è

$$W = nL = IL/e = 2\,\mathrm{watt}.$$

Nel tempo $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$ viene ceduta un'energia $Q = W\Delta t = 20\,\mathrm{joule}$.

Il calore specifico del rame è $C = 3.8 \cdot 10^2\,\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}$ e quindi la variazione di temperatura è

$$\Delta T = \frac{Q}{mC} = 0.53\,\mathrm{K}.$$

b) Il calcolo della velocità è immediato, partendo da $L = mc^2(\gamma - 1)$ e risolvendo rispetto a v. Conviene ricordare che per un elettrone $mc^2 = 0.51\,\mathrm{MeV}$. Risultato:

$$v = 0.979\,c = 2.94 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}.$$

c) Sul perché "medio" si è già detto. Dalla (12–20) si ottiene subito

$$\bar{E} = 4 \cdot 10^5\,\mathrm{V/m}.$$

d) Se potessimo assumere uniforme il campo, la soluzione sarebbe semplice: accanto alla (12–20) varrebbe anche
$$p = e\bar{E}t$$
e usando la relazione $v = c^2 p/(mc^2 + L)$ avremmo
$$t = \frac{vl}{c^2}\left(1 + \frac{mc^2}{L}\right) = 20\,\mathrm{ns}.$$

Se invece supponiamo che il campo sia presente solo all'inizio del tubo, questo verrà percorso quasi tutto con la velocità finale, e il tempo sarà 17 ns. Nel caso reale avremo chiaramente un valore intermedio tra i due.

Problema 4. (Urto elastico):

Indichiamo con E l'energia della particella urtante, con E', p' energia e impulso (modulo) di ciascuna delle due particelle dopo l'urto. La conservazione dell'energia e dell'impulso dicono
$$E + mc^2 = 2E' \qquad p = 2\,p'\cos\vartheta.$$

Possiamo eliminare E', p' per mezzo della (12–5) se dividiamo la seconda per $\cos\vartheta$, quadriamo e sottraiamo:
$$\left(E + mc^2\right)^2 - \frac{p^2}{\cos^2\vartheta} = 4\,m^2c^4.$$

Eliminiamo E ancora con la (12–5), e arriviamo a
$$\cos^2\vartheta = \frac{p^2}{p^2 - 2\,m^2c^2 + 2\,mc\,\sqrt{p^2 + m^2c^4}}.$$

Si verifica che $\vartheta \to \pi/4$ quando $p \to 0$ (legge dell'angolo retto) mentre $\vartheta \to 0$ se $p \to \infty$.

Problema 5. (Paradosso del condensatore):

Abbiamo un elettrone che parte con velocità iniziale orizzontale in un campo elettrico uniforme, di direzione verticale (fig. 4–4). Prendiamo l'asse x orizzontale, nel verso di $\vec{v}_0$, e l'asse y verticale, nel verso del campo elettrico $\vec{E}$.

Allora p_x è costante, mentre per p_y si ha
$$\frac{dp_y}{dt} = -eE \qquad \text{da cui} \qquad p_y = -eE\,t.$$

Per l'energia $\mathcal{E}$ dell'elettrone vale
$$\mathcal{E}^2 = m^2c^4 + p^2 = m^2c^4 + c^2p_x^2 + e^2E^2t^2.$$

La componente x della velocità si può ricavare da
$$v_x = \frac{c^2p_x}{\mathcal{E}} = \frac{c^2p_x}{\sqrt{m^2c^4 + c^2p_x^2 + e^2E^2t^2}}$$

da cui si vede la diminuzione nel tempo.

Spiegazione verbale: la componente p_x di $\vec{p}$ si conserva, ma essendo $p_x = m\,\gamma\,v_x$, v_x decresce perché γ aumenta. Infatti γ dipende dal *modulo* della velocità, e questo cresce a causa dell'aumento di v_y.

O meglio: γ aumenta perché aumenta l'energia cinetica, a spese dell'energia potenziale.

Problema 6. (Fotone in due RI):

Osserviamo anzitutto che chiedere come cambia l'energia del fotone equivale a chiedere come cambia la frequenza: stiamo quindi cercando la formula dell'*effetto Doppler relativistico*. Di solito a questa formula si arriva con le trasformazioni di Lorentz: lo scopo di questo problema è di mostrare come si può arrivare al risultato senza conoscerle.

Occorre però un artificio (lecito, ma non naturale): aggiungere al fotone una particella di massa non nulla, che si muove con velocità v nel rif. K ed è quindi ferma in K′. Fotone e particella non interagiscono, ma le pensiamo come un unico sistema.

Dobbiamo poi tener presente che la (12–6), che esprime l'invarianza di $E^2 - c^2p^2$, non vale solo per una particella, ma per qualsiasi sistema fisico; per es. nel nostro caso per il sistema composto del fotone e della particella ausiliaria che abbiamo aggiunto.

Indichiamo dunque con ε, ε' le energie del fotone nei due rif.; sappiamo che i rispettivi impulsi sono ε/c, ε'/c. Siano poi E, p energia e q. di moto della particella in K; in K′ l'energia della particella si ridurrà a mc^2, e la sua q. di moto sarà nulla. Quindi dalla (12–6):

$$(\varepsilon + E)^2 - (\varepsilon + cp)^2 = \left(\varepsilon' + mc^2\right)^2 - {\varepsilon'}^2.$$

Semplificando e facendo uso della (12–5) si arriva a

$$\varepsilon' = \varepsilon\,\frac{E - cp}{mc^2}.$$

Ma $E = mc^2\gamma$, $p = mv\gamma$, e quindi

$$\varepsilon' = \varepsilon\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \varepsilon\,\sqrt{\frac{c - v}{c + v}}. \tag{12–21}$$

LEZIONE 13

L'inerzia dell'energia

Nel settembre 1905 Einstein pubblica un articoletto di 3 pagine, il cui titolo, tradotto, è: *L'inerzia di un corpo dipende dal suo contenuto di energia*? È la scoperta di quella che poi verrà spesso chiamata, assai impropriamente, "equivalenza massa-energia." Dico impropriamente, perché questa seconda espressione, come vedremo più avanti, si presta a molteplici equivoci. Invece il titolo di Einstein spiega l'idea assai meglio di tanti discorsi confusi sull'equivalenza che capita di leggere qua e là.

Einstein riprende l'argomento anche in lavori successivi, e discute diversi esempi: sarebbe molto interessante, ma anche molto lungo, esaminarli tutti. È un procedimento frequente in Einstein (e che ha in comune con Galileo) quello di esporre diversi esperimenti ideali, che seguono strade apparentemente eterogenee per arrivare allo stesso risultato. Egli è consapevole di dover creare una nuova visione delle cose, e quindi di non potersi limitare a una sola dimostrazione, sia pure impeccabile; cerca invece di far vedere che tutto è collegato insieme, che tutto punta a quel certo risultato.

Einstein sa che di fronte a un'idea rivoluzionaria la semplice dimostrazione non basta, ma occorre un accumulo di prove; inoltre c'è chi rimane più convinto — intendo intuitivamente convinto — da una certa dimostrazione e chi da un'altra. Perciò ne escogita due o tre differenti e mostra che da qualunque parte si guardino le cose, la fisica che conosciamo ci obbliga a una data conclusione, che non possiamo eludere. Neppure possiamo pensare che ci sia un errore nel ragionamento: se anche il primo fosse sbagliato, ce n'è un altro che porta allo stesso risultato per una strada indipendente, e così via.

Fra i diversi argomenti che portano all'inerzia dell'energia, ho scelto di esporre il primo di quelli di Einstein, ma un po' variato, in una forma che mi sembra faciliti la presentazione didattica. I lavori di Einstein non sono ovviamente per studenti di liceo; sebbene non siano difficili da leggere, sono pur sempre scritti per dei fisici, e perciò occorre semplificarli.

Il ragionamento consiste in due esperimenti ideali, il primo dei quali è relativo a una situazione in cui la meccanica newtoniana spiega tutto quello che succede. Il secondo è strettamente parallelo al primo salvo per un particolare; ma analizzandone le conseguenze si è costretti ad ammettere l'inerzia dell'energia.

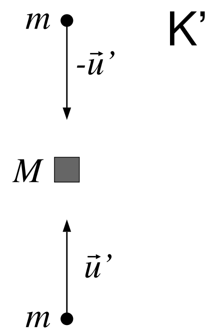


fig. 13–1

Un esperimento con i proiettili

L'idea in tutti e due i casi è quella di studiare un urto anelastico. Anticipando il risultato, il punto centrale è che un urto anelastico implica automaticamente una variazione di massa. Nel primo esperimento si ha questa situazione: su un oggetto di data massa M vengono sparate due masserelle m. Si analizza l'esperimento in due diversi rif.: uno, che diremo K$'$, è quello nel quale M è fermo e le masserelle m hanno velocità di modulo u', dirette verticalmente e opposte fra loro (fig. 13–1); il secondo è un rif. K, rispetto al quale K$'$ si muove in direzione orizzontale, verso destra (fig. 13–2). Nel rif. K la situazione si presenta così: M ha una velocità v, mentre i due proiettili hanno velocità oblique, di modulo u, la cui componente verticale è $\pm u'$ e quella orizzontale v (siamo in meccanica newtoniana).

Vediamo ora che cosa succede dopo l'urto, in ciascuno dei due rif. Anche nella meccanica newtoniana vale il PR: quindi tutte le leggi della meccanica valgono in entrambi i rif., e noi potremo prevedere l'esito dell'esperimento sia in K, sia in K$'$.

Ragioniamo in K$'$. I proiettili arrivano nel blocco M e ci restano incastrati: urto anelastico. All'inizio il blocco è fermo, mentre i due proiettili hanno la stessa massa e velocità opposte: dunque la q. di moto totale prima dell'urto è nulla. Il sistema complessivo (blocco più proiettili che ci sono dentro) dopo l'urto ha una q. di moto totale uguale a quella iniziale (conservazione della q. di moto). Conclusione: il blocco resterà dov'era. Alla fine avremo dunque un unico oggetto fermo, la cui massa è $M + 2m$.

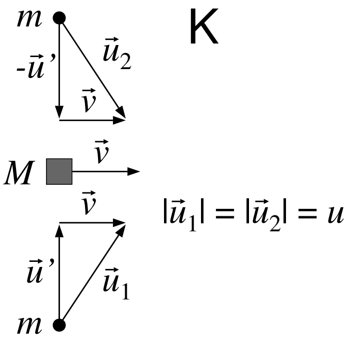


fig. 13–2

Passiamo ora al rif. K. In questo rif. M si muove verso destra, e quindi inizialmente ha una q. di moto Mv, diretta orizzontalmente. I due proiettili hanno velocità oblique, le cui componenti orizzontali sono entrambe v, mentre quelle verticali sono opposte. Ne segue che la componente verticale della q. di moto totale è zero, mentre la componente orizzontale vale $Mv + 2mv = (M + 2m)\,v$. Ora i proiettili colpiscono M e ci rimangono incastrati dentro: che succede?

Il motivo per discutere in dettaglio un fenomeno che si spiega bene con la meccanica newtoniana è di far vedere con chiarezza qual è la logica del ragionamento, in un caso in cui si può stare tranquilli sulle conclusioni. Fra poco faremo esattamente gli stessi ragionamenti, ma in una situazione nuova. Un tal modo di procedere ha un valore didattico, perché quando il nuovo ragionamento ci porterà a un risultato strano potremmo dubitare di aver sbagliato in qualche punto; ma se abbiamo la guida di un caso in cui il ragionamento ha funzionato, questo ci rassicura.

Il nocciolo del discorso è che noi abbiamo due modi per prevedere quello che deve succedere in K. Il ragionamento A usa direttamente la conservazione della q. di moto nel rif. K, che è anch'esso inerziale: la q. di moto dopo che i proiettili sono arrivati nel corpo M è la stessa di prima, cioè $(M + 2m)\,v$. La massa complessiva del blocco coi proiettili dentro è ora $M + 2m$: la sua velocità v_{f} dev'essere tale che la q. di moto resti la stessa, quindi $v_{\mathrm{f}} = v$. Concludo che in questo esperimento *la velocità del blocco non cambia.*

Il ragionamento B usa la trasf. dal rif. K$'$ a K. L'analisi fatta in K$'$ ci ha portati a concludere che dopo l'urto il blocco rimane fermo. Allora anche in K la velocità dopo l'urto non deve cambiare: sarà sempre quella di un oggetto fermo rispetto a K$'$, cioè v.

Due commenti sono qui opportuni. Il primo è che nell'esperimento secondo la meccanica newtoniana l'energia (meccanica) non si conserva. Non abbiamo dovuto tener conto di questo fatto, ma è bene averlo presente per il resto della discussione.

Il secondo commento riguarda la logica generale del discorso. Noi abbiamo usato i seguenti fatti: che tutti e due i rif. sono inerziali, che la trasf. da un rif. all'altro si sa fare (basta aggiungere $\vec{v}$ a tutte le velocità), che la q. di moto si conserva in entrambi. Nella meccanica newtoniana tutte queste cose sono coerenti tra loro: si capisce perciò che i due ragionamenti dovessero dare lo stesso risultato. Adesso faremo però un esperimento — sempre ideale — in cui accade qualcosa di nuovo.

Un esperimento con la radiazione

Il nuovo esperimento è esattamente lo stesso di prima, salvo che invece di sparare dei proiettili di massa m facciamo arrivare su M due pacchetti di radiazione e.m., di energia ε'. Supponiamo che M sia "nero," ossia completamente assorbente, e ci domandiamo che cosa succede. Anche in questo caso esamineremo l'esperimento nei due rif.

Naturalmente è essenziale per il seguito sapere che una radiazione e.m. trasporta q. di moto, e più esattamente che a un'energia ε' della radiazione è associata una q. di moto ε'/c. Sul piano didattico, ci sono diverse strade possibili per arrivare a quest'idea. La prima è la pressione di radiazione, che può essere introdotta per es. prendendo spunto dalla formazione della coda di una cometa; ma un conto è parlarne, un conto è dimostrarla.

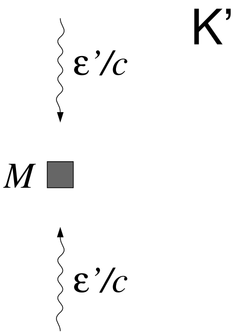


fig. 13–3

Provvisoriamente si potrebbero esibire anche in questo caso alcuni fatti sperimentali, e non pretendere di più. Solo per completezza, darò alla fine della lezione una dimostrazione non del tutto generale, ma forse accessibile.

Nel rif. K$'$ i due pacchetti di radiazione portano dunque q. di moto ε'/c, ma in versi opposti (fig. 13–3); quando vengono assorbiti la q. di moto di M, che era nulla, resta nulla. Fin qui non è cambiato assolutamente niente. Inoltre il blocco, che aveva una massa M prima di assorbire la radiazione... Noi sappiamo già dove andremo a parare, ma se vogliamo far vedere come nasce il problema dobbiamo supporre che la massa resti la stessa. Si può anche non dire niente, e la conservazione della massa verrà data per scontata. In ogni caso il blocco resterà fermo in K$'$, perché la sua q. di moto è nulla anche dopo aver assorbito la radiazione.

Passiamo a discutere la cosa nel rif. K. La massa M si muove verso destra, come prima, con velocità v; al posto dei cannoncini abbiamo ora due laser (fig. 13–4) che sparano la radiazione in una direzione obliqua. Perché obliqua? Basta pensare all'orologio a luce, che abbiamo studiato nella lezione 8: anche in quel caso, nel rif. in cui l'orologio si muove la radiazione viaggia obliquamente, dalla sorgente L allo specchio S e poi indietro al rivelatore R (fig. 13–5). Anzi, fra un momento ci serviremo proprio dell'analogia per calcolare l'angolo a cui viaggia la luce.

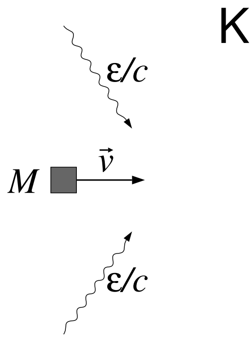


fig. 13–4

Indico l'energia con ε e non più con ε', perché cambiando rif. l'energia della radiazione potrà apparire diversa (chi sentisse la necessità di rendere plausibile questo fatto, potrà ricordare l'effetto Doppler, la connessione dell'energia con la frequenza nel caso dei fotoni, ecc.; ma non è indispensabile). In realtà non avremo bisogno della relazione tra ε ed ε': è meglio usare un nuovo simbolo perché sappiamo che è diversa, ma agli effetti del ragionamento la cosa non ha importanza.

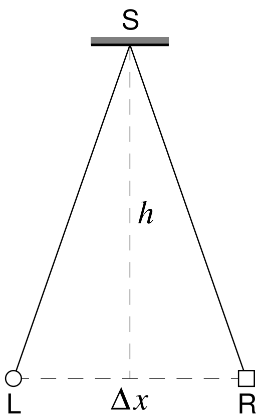


fig. 13–5

Questa radiazione viaggia in una direzione obliqua, a un angolo con la verticale che per il momento chiamo α, e che poi calcoleremo. La q. di moto orizzontale della radiazione è $(\varepsilon/c)\sin\alpha$; quindi la q. di moto totale è

$$M\gamma v + 2\,\frac{\varepsilon}{c}\,\sin\alpha.$$

Mi pongo ora la stessa domanda di prima: come si muoverà il blocco dopo che la radiazione è stata assorbita? con che velocità? Di nuovo, ragioniamo per due strade.

Ragionamento A: conservazione della q. di moto. Se la velocità è $v_{\rm f}$ la q. di moto sarà $M\gamma_{\rm f}v_{\rm f}$, e si ottiene così la relazione:

$$M\gamma_{\rm f}v_{\rm f} = M\gamma v + 2\,\frac{\varepsilon}{c}\,\sin\alpha. \qquad (13\text{–}1)$$

Per ora lasciamo la formula così com'è, senza calcolare $v_{\rm f}$.

Il ragionamento B è lo stesso di prima: se nel rif. K$'$ il blocco resta fermo, nel rif. K si muoverà con la velocità v di K$'$ rispetto a K. (Se la sua velocità non cambia in K$'$ non deve cambiare nemmeno in K.) Quindi la previsione del ragionamento B è: $v_{\rm f} = v$.

Nel primo esperimento i due ragionamenti andavano d'accordo; vediamo dunque se vanno d'accordo anche ora: sostituiamo $v_{\rm f} = v$ nella (13–1) e troviamo una contraddizione.

La massa non si conserva negli urti anelastici

A questo punto bisogna chiedersi: dove abbiamo sbagliato? La sola possibile via d'uscita (ma ci voleva Einstein per pensarci!) sta nell'aver dato per scontato che la massa resti la stessa; proviamo a lasciar cadere quest'ipotesi, e vediamo che cosa succede. Scriviamo dunque M_f al posto di M dopo l'assorbimento. Poiché non ho motivi per non credere al risultato del ragionamento B, mantengo $v_\mathrm{f} = v$; sostituisco ancora nella (13–1) e ricavo

$$M_\mathrm{f} = M + 2\,\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{\sin\alpha}{\gamma v}.$$

Ormai resta solo da calcolare α; basta pensare all'orologio a luce (fig. 13–5) per capire che $\sin\alpha = v/c$, e ne risulta

$$M_\mathrm{f} = M + \frac{2\varepsilon}{\gamma c^2}.$$

Osservate però che il nostro blocco, che aveva inizialmente una certa energia, ha assorbito due pacchetti di energia ε. Se l'energia in generale si conserva, l'energia del blocco dev'essere cambiata di 2ε, e quindi al posto di 2ε sono autorizzato a scrivere ΔE. Abbiamo così dimostrato:

a) che la massa è aumentata

b) che la variazione è

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{\gamma c^2}. \tag{13–2}$$

Rivediamo il ragionamento fatto. Abbiamo seguito la stessa strada del primo esempio, dove avevamo visto come si potesse prevedere la velocità finale del nostro blocco per due vie: o imponendo che la q. di moto in K si deve conservare, oppure dicendo che la velocità deve rimanere la stessa perché rimane la stessa nel rif. K′. Abbiamo provato a ripetere il discorso nel nuovo caso e abbiamo trovato che le due strade non portavano allo stesso risultato. La contraddizione non ci dev'essere (ecco perché è servito il primo esempio: per far vedere che in quel caso le cose funzionano, e che quindi la linea del ragionamento è giusta) dunque abbiamo sbagliato qualcosa.

Noi abbiamo ammesso tacitamente che la massa resti costante nel processo; se ci liberiamo di quest'ipotesi, se cioè ammettiamo che la massa possa variare, abbiamo il parametro libero M_f in più; allora le due deduzioni non sono più in contraddizione e ci permettono di calcolare M_f. Conclusione: quando un corpo che si muove con velocità v assorbe della radiazione *senza cambiare velocità* (badate bene a questa condizione) allora la sua massa aumenta di $\Delta E/(\gamma c^2)$. In particolare, se $\gamma = 1$, cioè se $v = 0$, allora $\Delta M = \Delta E/c^2$: notate che è questa la situazione in K′, il che mostra che *un corpo fermo accresce la sua massa quando assorbe energia restando fermo.*

Questo è il solo significato reale dell'inerzia dell'energia (o se preferite dell'equivalenza massa-energia): se in qualunque modo fate sì che l'energia di un oggetto cambi, senza che cambi la sua velocità — per esempio se resta fermo — necessariamente anche la sua massa cambia; *non potete cambiare l'energia senza cambiare anche la massa e viceversa.*

È chiaro che questo risultato si può tradurre poi nella ben nota relazione $E = Mc^2$: se una variazione di energia è sempre accompagnata da una variazione di massa, si potrà dire che noi misuriamo l'energia di un corpo misurandone la massa, e viceversa. Scritta così la relazione è vera però solo se $v = 0$, altrimenti si avrà $E = M\gamma c^2$.

Di passaggio osserviamo che se in K abbiamo $\Delta E = 2\varepsilon$, anche in K′ abbiamo $\Delta E' = 2\varepsilon'$. Dato che $\Delta E = c^2\gamma\,\Delta M$, mentre $\Delta E' = c^2\Delta M$, (*ΔM è invariante*), ne segue $\varepsilon = \gamma\varepsilon'$, ossia la legge di trasf. per l'energia del pacchetto di radiazione, che finora non conoscevamo. Si noti però che questa relazione vale solo nel caso particolare in cui in uno dei due rif. il pacchetto viaggia *trasversalmente* al moto relativo dei rif.

Qualche obiezione

A questo punto potrei aspettarmi qualche obiezione: ne discuterò tre. La prima è che il nostro esperimento ideale non dimostra in generale ciò che ho asserito, ossia che se cambia l'energia di un corpo (a parità di velocità) deve cambiare la massa: questo è stato dimostrato solo per il caso particolare in cui l'energia cambia per assorbimento di radiazione e.m. Ma riflettiamo: una volta che la radiazione è stata assorbita, quale effetto ha sul corpo? quello di scaldarlo. Nello stato finale non c'è più traccia di come l'energia è arrivata; perciò se supponiamo che tutte le grandezze fisiche del corpo dipendano solo dal suo stato presente, e non dalla sua storia, questo dovrà essere vero in particolare per la massa.

Dunque se la massa è aumentata nel nostro esperimento, lo stesso accadrà tutte le volte che il corpo arriverà allo stesso stato finale, anche per altra via: ad es. perché lo riscaldiamo cedendogli calore. Ciò che davvero conta per determinare la massa del corpo è la sua energia, e non il modo come è stata ottenuta.

La seconda obiezione è più delicata, tanto che dovremo ampiamente riprenderla nella prossima lezione. In sostanza si tratta di questo. Nel ragionamento coi proiettili, la massa del corpo urtato cambia, perché esso dopo l'urto ingloba i proiettili: è questo che ci permette di salvare la conservazione della q. di moto. Viceversa, nel caso della radiazione noi troviamo una difficoltà quando pretendiamo che la massa M resti inalterata dopo l'urto.

Ma allora la risposta sembra ovvia: anche i pacchetti di radiazione hanno massa, e dobbiamo tenerne conto nei calcoli. Se assumiamo che la loro massa sia $m_{\mathrm{r}} = \varepsilon/c^2$, e se usiamo nell'espressione della q. di moto la massa relativistica $M' = M\gamma$, al posto della (13–1) dovremo scrivere

$$(M'_{\mathrm{f}} + 2m_{\mathrm{r}})\, v_{\mathrm{f}} = M'v + 2\, m_{\mathrm{r}} c \sin\alpha = M'v + 2\, m_{\mathrm{r}} v$$

che è ovviamente soddisfatta con $v_{\mathrm{f}} = v$. Dunque non c'è nessun problema: la massa relativistica sistema tutto!

Rispondo: certo, e se non fosse così, la massa relativistica non avrebbe avuto vita lunga e validi difensori. Come ho già detto, rimando alla prossima lezione la spiegazione del perché secondo me la massa relativistica sia più dannosa che utile. Ma nell'obiezione appena illustrata c'è un'altra idea che va discussa, e può essere riformulata a parte, come terza obiezione: vediamola.

Significato di $E = Mc^2$

Abbiamo dimostrato che se cambia l'energia del corpo senza che cambi la velocità, allora deve cambiare la massa (notate che il nostro esperimento ideale è servito solo a far vedere come si può cambiare l'energia di un corpo senza cambiarne la velocità). Ma non potevamo arrivare a questo risultato direttamente, visto che la relazione

$$E = M\gamma c^2 \tag{13–3}$$

ci era già nota? Se la velocità non cambia, γ è costante; allora perché cambi E deve cambiare M.

La risposta è che la (13–3) è stata introdotta, come definizione di energia, relativamente a tutt'altro tipo di situazione; ma questa risposta ha bisogno di essere spiegata meglio.

Noi abbiamo ricavato la (13–3) per coerenza col teorema delle forze vive. Abbiamo detto: è lecito chiamare energia quest'espressione, dal momento che quando si applica una forza — e quindi si cambia la velocità — allora l'energia cinetica cambia esattamente come cambia E. Perciò fino a questo punto sapevamo solo che la (13–3) è valida, *per un oggetto di massa assegnata*, quando consideriamo variabile la velocità. In questo contesto, non solo la massa non cambiava, ma essa era anzi una caratteristica invariabile del corpo. Adesso abbiamo fatto un passo avanti: abbiamo dimostrato che la massa di un corpo *può cambiare* grazie a scambi di energia, e che la stessa relazione (13–3) connette le variazioni della massa a quelle dell'energia, *a velocità fissata.*

Abbiamo quindi scoperto che la (13–3) ha validità incondizionata: qualunque sia il modo con cui cambiamo i parametri che vi figurano, l'energia del sistema è sempre legata alla massa e alla velocità da questa formula. La sola cosa che non possiamo cambiare è c^2: cambierà M se il corpo assorbe o emette radiazione, o anche se gli si cede (o gli si sottrae) calore; cambierà v se gli si applica una forza. Sono due modi diversi di cambiare l'energia: si può fare lavoro meccanico sul corpo applicando una forza, e allora cambia la velocità e non la massa; oppure si può costruire un congegno come il nostro, in cui si cede energia senza alterare la velocità: in tal caso cambierà la massa.

Ecco perché quando si dice che la massa dipende dalla velocità si crea confusione, mentre presentando le cose come abbiamo visto, si capisce bene che ci sono due situazioni del tutto differenti. Nella prima, cambiare la velocità comporta cambiare γ, e quindi l'energia cambia, nello stesso senso della fisica newtoniana: varia l'energia cinetica. Nella seconda il corpo può addirittura restare fermo; la sua massa cambia perché lo abbiamo "caricato" o "scaricato" di energia. Il legame dell'energia con la massa, e la conseguente variazione della massa nel secondo tipo di fenomeni, è di gran lunga più significativo di quel che potrebbe apparire dal piccolo espediente formale di scrivere $m' = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Una volta capito questo, si capisce anche che in ultima analisi *la massa di un corpo non è altro che una misura della sua energia quando è fermo.* C'è il fattore c^2, ma questo è un accidente derivato dalle unità di misura: è la stessa seccatura che abbiamo sempre incontrato in tutte le formule relativistiche. Purtroppo agli inizi della fisica (fino a tutto il secolo scorso) non si sapeva che ci fosse una relazione tra spazio e tempo, e così sono state introdotte unità indipendenti per le lunghezze e per i tempi: di qui la comparsa di una *costante universale.* Se invece come unità di lunghezza si usasse il secondo-luce, avremmo $c = 1$ ed $E = m$.

Ma c'è di più: mentre nella meccanica newtoniana l'energia si conserva solo negli urti elastici (o in generale quando sono in gioco soltanto forze conservative) vediamo ora che la variazione della massa tiene conto anche delle interazioni non conservative, e perciò che nella massa sono incluse tutte le possibili forme di energia, *anche non meccanica.* È questa grande unificazione che costituisce la vera importanza di $E = Mc^2$: quando si tenga conto sia dell'energia cinetica, sia di tutte le altre possibili forme di energia riassunte nella massa dei corpi, l'energia relativistica *si conserva sempre.*

La pressione di radiazione

Supporremo noti i seguenti fatti:

- nel vuoto le onde e.m. si propagano con velocità c
- scelta una terna (x, y, z), se un'onda piana monocromatica si propaga in direzione z, e se è polarizzata in modo che il campo $\vec{E}$ sia diretto secondo x, il campo $\vec{B}$ è diretto secondo y e ha grandezza $B = E/c$
- la forza che il campo e.m. esercita su di una carica q ha l'espressione (forza di Lorentz)

$$\vec{F}^{\,\mathrm{em}} = q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

da cui

$$F_x^{\,\rm em} = qE_x, \quad F_y^{\,\rm em} = 0, \quad F_z^{\,\rm em} = \frac{q}{c}\,E\,v_x.$$

Consideriamo una particella carica investita dall'onda e che sia libera di muoversi in un mezzo viscoso, che la frena con una resistenza $\vec{F}^{\,\rm r} = -k\vec{v}$. Abbiamo

$$m\vec{a} = \vec{F}^{\,\rm em} + \vec{F}^{\,\rm r}$$

e supporremo che la frequenza dell'onda sia $\omega \ll k/m$: allora l'accelerazione della particella è dell'ordine di ωv, e ne segue $ma \ll F^{\,\rm r}$. Si può dunque scrivere

$$\vec{F}^{\,\rm em} = k\vec{v}.$$

La potenza assorbita dalla carica (e dissipata dalla resistenza del mezzo) è

$$W = \vec{F}^{\,\rm em} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = qE\,v_x.$$

La componente z di $\vec{F}^{\,\rm em}$ causa una variazione della q. di moto della particella:

$$\dot{p}_z = F_z^{\,\rm em} = \frac{q}{c}\,E\,v_x = \frac{W}{c}.$$

Si noti che $\vec{F}^{\,\rm em}$ e $\vec{v}$ oscillano in fase: quindi tanto W quanto $\dot{p}_z$ hanno valor medio positivo. Abbiamo così il risultato: una carica assorbe da un'onda e.m. piana un impulso pari all'energia assorbita, divisa per c. Siamo perciò autorizzati a concludere che *un'onda piana che trasporti un'energia ε trasporta anche un impulso ε/c.*

Problemi

1. Calcolare la frazione di massa perduta dal Sole in un miliardo di anni, assumendo che questa perdita sia dovuta solo all'emissione di radiazione e che la luminosità del Sole si mantenga costante al valore attuale: $4 \cdot 10^{33}$ erg/s. (La massa del Sole è $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ g.)

2. Spiegare perché un elettrone libero non può assorbire un fotone.

3. Una particella ne urta un'altra ferma, di ugual massa. L'urto è anelastico, e dà luogo a un'unica particella finale.
   a) Calcolare la massa di questa.
   b) Studiare lo stesso fenomeno nel rif. del centro di massa, in cui le due particelle iniziali hanno velocità opposte.
   c) Spiegare perché il processo proposto è estremamente improbabile.

4. Un atomo inizialmente fermo, che si trova in uno stato eccitato, emette un fotone.
   a) Calcolare la relazione tra l'energia del fotone e la variazione di massa dell'atomo.
   b) Considerare in particolare il caso di un atomo d'idrogeno nel livello $n = 2$.

5. La tecnica del raffreddamento laser di fasci atomici (Nobel per la fisica nel 1997) si basa su quest'idea: un atomo capace di una transizione con salto di energia ΔE dal livello fondamentale a uno eccitato, e che sia in moto con una certa velocità v, può assorbire fotoni che nel rif. del laboratorio hanno energia $\varepsilon < \Delta E$ solo se se li vede arrivare incontro.

In queste condizioni dopo l'assorbimento la sua velocità sarà minore, il che corrisponde appunto a un raffreddamento.

a) Considerando una sola dimensione spaziale, scrivere la relazione tra ε, v, ΔE e la massa M dell'atomo.
b) Calcolare la velocità v' dopo l'assorbimento del fotone.
c) Se gli atomi sono di rubidio ($A = 85$) quanto vale v, intesa come velocità quadratica media a 500 K? Quanto vale $v - v'$?
d) Il fotone assorbito verrà poi riemesso: che effetto ha questo fatto sul raffreddamento?

Risposte

Problema 1. (Massa perduta dal Sole):

Se $L_\odot$ è la luminosità del Sole (potenza elettromagnetica irraggiata su tutto lo spettro) la massa perduta nel tempo t è

$$\delta M_\odot = L_\odot\, t/c^2$$

e la frazione richiesta è

$$\frac{\delta M_\odot}{M_\odot} = \frac{L_\odot\, t}{M_\odot\, c^2}.$$

Usando i dati:

$$\frac{\delta M_\odot}{M_\odot} = 7 \cdot 10^{-5}.$$

Problema 2. (Elettrone e fotone):

L'esperimento ideale descritto nella lezione mostra perché un elettrone non può assorbire *due* fotoni opposti: alla fine dovrebbe avere una massa maggiore. Ma può sembrare che la stessa limitazione non ci sia per un singolo fotone, perché dopo averlo assorbito l'elettrone sarà in moto; avrà quindi un'energia cinetica che potrebbe salvare il bilancio dell'energia.

Supponiamo l'elettrone inizialmente fermo. Questa non è una restrizione, perché esiste sempre un RI in cui ciò accade, e d'altra parte che l'assorbimento sia possibile o no non dipende dal rif. scelto per il calcolo: si tratta di un fatto *invariante*.

Sia ε l'energia del fotone; E, p energia e impulso dell'elettrone dopo aver assorbito il fotone: la conservazione di energia e impulso dice

$$mc^2 + \varepsilon = E \qquad \varepsilon/c = p.$$

Basta moltiplicare la seconda per c, quadrare e sottrarre: dopo le semplificazioni si trova

$$2\,mc^2\varepsilon = 0$$

che è falsa. Dunque il processo è impossibile.

Si può anche fare il calcolo in un RI qualsiasi, nel quale l'elettrone non è fermo. È un po' più complicato, ma è istruttivo vedere come porta allo stesso risultato.

Siano ora E, $\vec{P}$ energia e impulso *iniziali* dell'elettrone; $\vec{p}$ l'impulso del fotone. L'energia del fotone sarà cp. Indicherò poi con E', $\vec{P}'$ energia e impulso *finali* dell'elettrone. Usando sempre le leggi di conservazione:

$$E + cp = E' \qquad \vec{P} + \vec{p} = \vec{P}'.$$

Prendendo il quadrato del modulo dei due membri della seconda si ha

$$P^2 + p^2 + 2\,\vec{P} \cdot \vec{p} = {P'}^2 \tag{13–4}$$

mentre quadrando la prima:

$$E^2 + c^2p^2 + 2\,c\,E\,p = E'^2. \tag{13–5}$$

Moltiplicando la (13–4) per c^2 e sottraendo dalla (13–5) abbiamo

$$E\,p = c\,\vec{P}\cdot\vec{p}.$$

Ma questa è impossibile, perché $\vec{P}\cdot\vec{p} \le Pp$ mentre $E > cP$.

Problema 3. (Urto anelastico):
a) Il procedimento è sempre il solito: indico con E, p energia e impulso della particella urtante; con E', p' quelli della particella finale; con m' la massa richiesta. Allora:

$$E + m\,c^2 = E' \qquad p = p'.$$

Con la tecnica già usata (quadrare e sottrarre) si trova

$$m' = 2\,m\,\sqrt{1 + \frac{E - m\,c^2}{2\,m\,c^2}}. \tag{13–6}$$

La forma in cui ho scritto m' serve a mostrare che quando E è vicina a mc^2, m' è circa $2m$, ma è sempre $m' > 2m$, com'era prevedibile.

b) Nel rif. del centro di massa le due particelle hanno uguali energie $\bar{E}$ e impulsi opposti: $\bar{p}$ e $-\bar{p}$. La particella finale è ferma. Dunque c'è solo da imporre la conservazione dell'energia, che fornisce banalmente

$$m' = 2\bar{E}/c^2. \tag{13–7}$$

Che interesse può avere questo risultato? Il fatto è che m', essendo invariante, deve rimanere la stessa nei due rif. Perciò il confronto tra la (13–6) e la (13–7) ci permette di connettere E con $\bar{E}$:

$$2\left(\frac{\bar{E}}{mc^2}\right)^2 = 1 + \frac{E}{mc^2}.$$

Da qui si vede che quando le energie sono grandi ($\gg mc^2$) E cresce come il quadrato di $\bar{E}$.

Questo spiega il vantaggio di usare, negli esperimenti d'urto, fasci di particelle "contropropaganti" invece di mandare un fascio contro un bersaglio fermo. Per es. due fasci di protoni con $\bar{E} = 100\,\text{GeV}$ equivalgono a un fascio di $2 \cdot 10^4\,\text{GeV}$ contro bersaglio fisso.

c) Perché il processo avvenga, l'energia della particella incidente deve essere esattamente quella che si ricava dalla (13–6) risolvendola rispetto a E.

In realtà in un esperimento reale si avrà un fascio di particelle, non tutte delle stessa precisa energia; ma solo quelle che soddisfano la (13–6) possono reagire. La questione dovrebbe essere approfondita, ma ci porterebbe troppo lontano…

Problema 4. (Emissione di un fotone):

Indichiamo con M_1 la massa dell'atomo nello stato fondamentale; quella nello stato eccitato sarà maggiore, e la indichiamo con M_2. Siano poi: E_1 l'energia dell'atomo dopo emesso il fotone; ε l'energia del fotone, $p = \varepsilon/c$ il suo impulso. L'impulso dell'atomo sarà opposto a quello del fotone, ma di uguale modulo.

a) La conservazione dell'energia ci dice

$$M_2\, c^2 = E_1 + \varepsilon$$

e al solito

$$E_1^2 = M_1^2 c^4 + c^2 p^2 = M_1^2 c^4 + \varepsilon^2.$$

Eliminando E_1:

$$\varepsilon = \frac{\left(M_2^2 - M_1^2\right) c^2}{2\, M_2}$$

che è minore di $\Delta = (M_2 - M_1)\, c^2$.

La ragione è che parte dell'energia Δ si ritrova come energia cinetica dell'atomo. Infatti

$$E_1 - M_1\, c^2 = \Delta - \varepsilon = \frac{\Delta^2}{2\, M_2\, c^2}.$$

Si vede che $\Delta - \varepsilon$ è di secondo ordine in Δ.

b) I dati per un atomo d'idrogeno sono: $M_1\, c^2 = 0.94\,\text{GeV}$, $\Delta = 10.2\,\text{eV}$. Perciò la differenza relativa $(\Delta - \varepsilon)/\Delta$ vale circa 10^{-8} e per atomi più pesanti è ancora minore. Tuttavia non è priva di applicazioni pratiche: v. problema 5.

Problema 5. (Raffreddamento laser):

Indichiamo, al solito, con M_1, M_2 la massa dell'atomo prima e dopo l'assorbimento ($M_1 = M$); con E_1, E_2 le energie; con p_1, p_2 gli impulsi; con ε l'energia del fotone. Le leggi di conservazione danno:

$$E_2 = E_1 + \varepsilon \qquad p_2 = p_1 - \varepsilon/c. \tag{13–8}$$

La novità ora è che l'atomo è in moto sia prima che dopo l'assorbimento; nella conservazione dell'impulso abbiamo tenuto conto coi segni del fatto che il fotone viaggia incontro all'atomo.

Con la tecnica di quadrare e sottrarre troviamo:

$$M_2^2 c^4 = M_1^2 c^4 + 2\varepsilon\,(E_1 + c\, p_1). \tag{13–9}$$

a) Dobbiamo ora introdurre ΔE e v. Le relazioni sono:

$$M_2\, c^2 = M_1\, c^2 + \Delta E \qquad p_1 = \frac{v}{c^2}\, E_1.$$

La prima esprime il fatto che ΔE è la differenza tra le energie di un atomo *fermo* nello stato fondamentale e in quello eccitato. La seconda non è che la (12–7).

Sostituendo queste nella (13–9) e usando $E_1 = M_1 c^2 \gamma$, dopo qualche semplificazione si arriva a

$$\varepsilon\, \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \Delta E \left(1 + \frac{\Delta E}{2\, M\, c^2}\right). \tag{13–10}$$

La (13–10) può essere ancora semplificata tenendo conto che $\Delta E \ll M\,c^2$ (almeno 10 ordini di grandezza) e che anche $v \ll c$ (almeno 6 ordini di grandezza). Si può quindi buttar via il secondo termine in parentesi a destra, e a primo membro tenere solo i termini di prim'ordine in v/c: si ottiene allora

$$\varepsilon\left(1+\frac{v}{c}\right)=\Delta E. \tag{13–11}$$

b) Il modo più semplice per arrivare al risultato è di osservare che dalle (13–8) segue

$$E_1+c\,p_1=E_2+c\,p_2.$$

Esprimendo E_1, p_1, E_2, p_2 in funzione di v, v' si ha

$$M_1\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}=M_2\sqrt{\frac{c+v'}{c-v'}} \tag{13–12}$$

che permette di ricavare v'. Ma conviene fare subito le approssimazioni già viste: la (13–12) diventa

$$1+\frac{v'}{c}=\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1-\frac{\Delta E}{Mc^2}\right)$$

da cui

$$v'=v-\frac{\Delta E}{Mc}. \tag{13–13}$$

Va detto che alla (13–13) si può arrivare, assai più semplicemente e senza scomodare la relatività, dalla semplice conservazione della quantità di moto newtoniana:

$$Mv'=Mv-\varepsilon/c \qquad \text{con} \qquad \varepsilon=\Delta E.$$

Ciò è lecito perché nel moto dell'atomo gli effetti relativistici sono del tutto trascurabili, e perché anche la differenza tra ε e ΔE è molto piccola, come mostra la (13–11).

c) Per $A = 85$ avremo $M \simeq 85\,m_{\rm p} = 1.4\cdot10^{-25}\,$kg (la differenza di massa tra protone e neutrone, il difetto di massa del nucleo e le masse degli elettroni hano effetto solo sulla terza cifra). Perciò

$$v=\sqrt{\frac{3kT}{M}}=1.2\cdot10^2\,\text{m/s}.$$

Per il rubidio, da stato fondamentale a primo livello eccitato, $\Delta E \simeq 1.6\,$eV. Dalla (13–13) si ha

$$|\Delta v|=v-v'=\frac{\Delta E}{Mc}=6\cdot10^{-3}\,\text{m/s}.$$

d) Il fotone verrà riemesso in direzione casuale; se fosse riemesso nella stessa direzione (e verso) di quello incidente, alla fine l'atomo riprenderebbe la velocità iniziale. Se invece venisse emesso in verso opposto, si avrebbe un'ulteriore riduzione della velocità, circa uguale a quella in assorbimento. Per le altre direzioni si avrebbe un effetto intermedio, e sembra potersi concludere che in media l'emissione non cambierà la velocità dell'atomo.

In realtà ciò è vero *solo in media*, per cui su un insieme di atomi la riemissione produce un effetto che limita il raffreddamento che si può ottenere. Ma la discussione accurata di questo aspetto, come pure di tutta la vera tecnica di raffreddamento, va molto al di là dei nostri scopi...

LEZIONE 14

La cosiddetta "massa relativistica": prima parte

Questa lezione sarà dedicata a combattere e a cercare di sfatare un vero feticcio: appunto la massa relativistica. Cosiddetta, perché secondo me non merita l'appellativo... Cominciamo.

Abbiamo già visto due punti che sembrano giustificare la massa relativistica $m' = m\gamma$: l'espressione dell'impulso e quella dell'energia, $p = m'v$, $E = m'c^2$. Quanto all'impulso, sembra un'innocua definizione: visto che vogliamo conservare il più possibile della meccanica newtoniana, perché non conservare anche $p = mv$? Basterà scrivere $p = m'v$, dove $m' = m\gamma$. L'espressione dell'impulso resta la stessa, solo che "la massa dipende dalla velocità." Ma massa significa inerzia, e l'inerzia rimanda a $\vec{F} = m\vec{a}$. Si deve dunque scrivere $\vec{F} = m'\vec{a}$? *Niente affatto*!

Verifichiamo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d}{dt}(\gamma\vec{v}) = m\gamma\,\vec{a} + m\vec{v}\,\frac{d\gamma}{dt} = m\gamma\,\vec{a} + m\gamma^3\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\,\vec{v}. \qquad (14\text{–}1)$$

Infatti da $1/\gamma^2 = 1 - v^2/c^2$, derivando rispetto a t:

$$-\frac{2}{\gamma^3}\,\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{2\,\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}$$

da cui

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma^3\,\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}.$$

Proiettando la (14–1) nella direzione di $\vec{v}$ si trova

$$F_{\|} = m\gamma a_{\|} + m\gamma^3\,\frac{v^2}{c^2}\,a_{\|} = m\gamma^3 a_{\|}$$

mentre proiettando in direzione ortogonale a $\vec{v}$:

$$F_{\perp} = m\gamma a_{\perp}.$$

Dunque $\vec{F} = m\gamma^3\vec{a}$ se la forza è parallela a $\vec{v}$, mentre $\vec{F} = m\gamma\vec{a}$ se è perpendicolare. Per questa ragione c'è chi parla di *due* masse: la "massa trasversale" $m\gamma$, e la "massa longitudinale" $m\gamma^3$. Con quale vantaggio per la chiarezza e la semplicità, lascio a voi giudicare!

Molto più semplice dire che la seconda legge della dinamica è sempre $\vec{F} = d\vec{p}/dt$, ma cambia l'espressione di $\vec{p}$ in funzione di $\vec{v}$.

La formula più citata e meno capita di tutta la fisica

Passiamo all'energia. La tentazione è forte: $E = mc^2$ è la formula più famosa, quella che tutti citano anche se non sanno che cosa significa! Argomenti contro:

- il rasoio di Occam: se la massa relativistica è un altro nome per l'energia (a parte il fattore c^2) è un doppione inutile
- nessun fisico usa *mai* la massa relativistica
- molto spesso i testi che ne fanno uso commettono gravi errori
- la massa relativistica fa perdere di vista la massa *invariante*.

Sul primo punto non mi sembra occorra aggiungere altro. Sul secondo, sarebbe interessante esaminare alcuni libri che seguono questa strada. Lasciando da parte quelli che contengono veri e propri errori, tipicamente la cosa funziona così. Dopo aver speso una paginetta o giù di lì per introdurre la massa relativistica, questi libri, come regola generale, *la dimenticano del tutto*, e vanno avanti senza usarla mai. O magari troverete qualche problema del genere: "un elettrone viene accelerato con un potenziale di 200 000 V: quanto vale la sua massa?" la cui soluzione consiste nello scrivere la formula giusta e fare il conto.

Questi libri tratteranno la dinamica relativistica, discuteranno le verifiche sperimentali, ecc.; parleranno sì ripetutamente di massa, ma sempre e soltanto come sinonimo di "massa di quiete." La ragione secondo me è ovvia: gli autori, in quanto fisici di mestiere, sono così abituati (come tutti i fisici) a pensare alla massa come massa invariante, che dopo aver pagato il loro debito al feticcio della massa relativistica non ci pensano più.

Così va quando va bene; poi ci sono i casi di grossolani errori, che discuterò più avanti. L'ultimo punto è che la massa relativistica mette in ombra la massa invariante, che è un concetto fondamentale della relatività, come quello di tempo proprio; al quale è del resto imparentato, come abbiamo visto.

La cosiddetta "massa relativistica": seconda parte

Si potrebbe pensare che basti intendersi: chiamiamo "massa relativistica" quella cosa per cui occorre moltiplicare la velocità per ottenere la q. di moto, e che ovviamente dipende dalla velocità; poi chiamiamo "massa di riposo" quella con cui abbiamo ragionato noi, che non dipende dalla velocità. Si potrebbe fare, ma solo a condizione di non commettere errori nei ragionamenti successivi; però più avanti vedremo che il rischio di creare una certa confusione è piuttosto alto.

In effetti su questo argomento molti libri incorrono in veri errori logici: spesso non si sa più di quale massa si stia parlando, non si capisce se l'energia si conserva o no; e purtroppo anche in testi di livello universitario. Per alcuni esempi, vi rimando al mio "Dialogo sulla massa relativistica," pubblicato in *La Fisica nella Scuola*, **14** (1981), p. 25, e riprodotto nell'Appendice 1.

All'argomento del rasoio di Occam, la risposta più comune è che la massa relativistica ci permette di scrivere $E = m'c^2$, cioè di scoprire la "grande" relazione di Einstein. Ma a parte la critica a questo modo di "scoprire" la suddetta relazione, di cui ho parlato nella lezione precedente, è il modo peggiore di arrivarci, perché porta a mettersi nei guai, come vedremo più avanti.

Insisto che la massa invariante è molto più interessante, e oltre alle ragioni che ho già esposte ce n'è un'altra: quando diciamo, per esempio, che l'elettrone ha una massa di $9 \cdot 10^{-31}$ kg è chiaro che intendiamo la massa invariante. Nell'elenco delle proprietà fondamentali (carica, spin, ecc.) che caratterizzano una particella, un atomo, un nucleo, s'include la massa: ma ovviamente quella che è veramente caratteristica della particella, cioè la massa invariante.

La massa relativistica: un errore didattico

Da qualunque parte la si guardi (l'elenco non è ancora finito) non riesco a vedere nessun vantaggio nell'uso della massa relativistica. Ecco perché uno dei punti caratterizzanti di questa presentazione della relatività è l'ostracismo alla massa relativistica. Detta in breve, la mia posizione è la seguente: uno ha il diritto di fare le scelte che preferisce, di dare tutte le definizioni che vuole; da un punto di vista logico, di coerenza formale, sono tutte legittime. Ma dal punto di vista didattico le scelte non sono tutte equivalenti; un discorso può essere perfettamente a posto quanto a esattezza delle deduzioni, e allo stesso tempo essere criticabile dal punto di vista didattico.

In questo spirito io critico decisamente l'uso della massa relativistica come *errore didattico*; il che non vuol dire che chi ne parla dica sempre cose sbagliate, scriva formule che non tornano o faccia errori di ragionamento. Quando parlo di errore didattico intendo solo che a mio giudizio quel modo di presentare le cose produce risultati negativi.

E per finire, ecco l'opinione di Einstein:

> "Non è bene parlare della massa $m/\sqrt{1-v^2/c^2}$ di un corpo in moto, poiché non se ne può dare una definizione chiara. Se si vogliono descrivere le proprietà inerziali dei corpi in moto veloce, è meglio limitarsi alla 'massa di riposo' m e dare piuttosto le espressioni dell'impulso e dell'energia" (riprodotto da L.B. Okun in "The concept of Mass," *Physics Today*, **49** (1989), p. 31).

Un esempio: il decadimento del K^0

Vorrei ora discutere un esempio che è particolarmente adatto a chiarire i rapporti tra massa ed energia e a mostrare quali pasticci si possono fare se si usa la massa relativistica.

Qualche volta la fortuna aiuta, e non c'è bisogno d'inventare un esperimento ideale; tra gli oggetti che esistono in natura alcuni sembrano fatti apposta per illustrare punti interessanti: uno di questi è il mesone K^0. Si tratta di una delle prime "particelle strane" scoperte intorno al 1950: è una particella instabile, che può decadere in diversi modi; a noi interessa quello in due pioni, uno positivo e uno negativo, di uguale massa (uno l'antiparticella dell'altro):

$$\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-.$$

Il K^0 ha una vita media di circa $9 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{s}$, ma di questo dato non faremo uso.

In sostanza, se un K^0 è inizialmente fermo, dopo un po' emette due pioni e scompare: questi sono i fatti. Ora si tratta di analizzarli sulla base di ciò che abbiamo detto. E insisto che l'analisi che farò è quella che fa qualunque fisico, perché *nessun fisico che si occupa di queste cose usa mai la massa relativistica.*

La massa (invariante) del K^0 è $498\,\mathrm{MeV}/c^2$, quella di ciascun pione è $140\,\mathrm{MeV}/c^2$. Quando il K^0 sparisce e nascono i due pioni, passiamo da un sistema consistente di una sola particella, con massa $498\,\mathrm{MeV}/c^2$, a due con massa $140\,\mathrm{MeV}/c^2$. Possiamo subito osservare che se le cose vanno così, i fatti sperimentali ci obbligano a dire che *ci sono fenomeni in cui la massa non si conserva.*

Attenzione, perché qui è estremamente facile capire una cosa per un'altra. Quando dico che la massa non si conserva, intendo che in un processo del genere la somma delle masse delle particelle iniziali e quella delle particelle finali possono essere diverse; così come quando all'opposto dico che la q. di moto si conserva, con ciò intendo che la somma delle q. di moto iniziali è uguale a quella delle q. di moto finali. Se facciamo il calcolo con le masse nel nostro esperimento, troviamo da una parte 498, dall'altra $2 \times 140 = 280$: c'è una bella differenza! Potremmo dire che c'è un "difetto di massa", anche se di solito quest'espressione si usa in tutt'altro contesto.

Che cosa vuol dire "conservazione della massa"?

Nella fisica prima di Einstein si parlava abitualmente di conservazione della massa; però bisogna stare attenti, perché l'espressione può avere diversi significati, che a prima vista sembrano lo stesso.

Qual è il senso in cui Lavoisier parlava di conservazione della massa? Prendiamo un certo composto, lo mescoliamo a un altro, facciamo avvenire una reazione in un ambiente chiuso, in modo che non sfugga niente; pesiamo il tutto prima, ripesiamo dopo ... e troviamo che la massa è rimasta invariata. Ebbene, questo modo di procedere è diverso da quello usato col K^0: infatti per vedere se la massa è rimasta la stessa, nessuno pesa direttamente gli atomi prima e dopo la reazione: non lo faceva Lavoisier, e non lo fa neppure un chimico dei nostri tempi.

Come sappiamo benissimo, anche se ciò fosse possibile, nelle reazioni chimiche si vedrebbe molto poco: ci vorrebbero sensibilità estreme per scoprire un difetto di massa (per avere una prima indicazione si dovrebbe arrivare a 10^{-10}, come vedremo in un esempio fra poco). Ma non è questo il punto: in realtà nessuno ha mai fatto un esperimento di chimica in quel modo, pesando tutte le singole masse prima e dopo. In fondo può sembrare che non ci sia bisogno di misurarle tutte: quando prendo il recipiente e lo peso, non sto forse sommando le masse di tutte le particelle che contiene? Il fatto è che *questo non è vero.*

Ricordiamo che la massa misura l'energia totale del sistema, sia esso un corpo macroscopico oppure una particella: la massa è l'energia totale divisa per c^2. Se prendiamo un recipiente contenente un gas, questo consiste di molecole dotate di agitazione termica. Misurando con la bilancia la massa complessiva, quella che realmente si misura è l'energia totale del gas; il quale è fermo, ma solo nel senso che è fermo il suo centro di massa, cioè che nel nostro rif. la sua q. di moto totale è zero. Però dentro il recipiente ci sono tante molecole che guizzano da tutte le parti, per cui l'energia di ciascuna di queste molecole non è uguale a mc^2: l'i-esima molecola avrà un'energia $E_i = mc^2\gamma_i$, e per ogni singola molecola $\gamma_i > 1$. L'energia totale del nostro sistema sarà $\sum mc^2\gamma_i$, che è maggiore di $\sum mc^2$. Ne segue che quando pesiamo il recipiente con dentro un gas, non misuriamo la somma delle masse delle molecole del gas: misuriamo l'energia totale, *che è maggiore della somma delle masse.*

Una possibile obiezione: che c'entra questo discorso sulle energie, con la massa che ricavo da una pesata? Bene: ricordate il PE forte? Se è vero che il gas caldo cade con la stessa accelerazione del gas freddo, vuol dire che l'energia addizionale contribuisce nella stessa misura tanto alla massa inerziale (di questo ci ha convinti Einstein) quanto a quella gravitazionale: dunque misurare la massa con una pesata, o mediante $F = ma$, ci darà in ogni caso lo stesso risultato.

Vediamo un altro esempio: "quando scaldo un pezzo di ferro, la sua massa aumenta". Che vuol dire? Al crescere della temperatura aumentano le velocità di vibrazione termica degli atomi, quindi aumentano i γ_i; l'energia totale aumenta non perché sono aumentate le masse delle singole particelle — se per massa intendiamo, come io voglio intendere, la massa invariante — ma perché sono aumentati i γ_i. Per di più, in questo caso entra in gioco anche l'energia potenziale, perché gli atomi del solido sono legati tra loro. Quando aumenta l'ampiezza delle oscillazioni, aumenta anche l'energia potenziale media. L'energia totale è la somma di tutte le energie; la massa invariante del sistema complessivo misura l'energia totale del sistema, qualunque sia la forma in cui quell'energia è presente: come energia cinetica delle molecole costituenti, come energia potenziale d'interazione, come radiazione elettromagnetica (che esiste sempre dentro il recipiente, anche se noi non la vediamo)...

Il bello della sintesi einsteiniana, dell'interpretazione relativistica della massa, è questo: *qualunque sia la forma sotto cui è presente l'energia, essa contribuisce a cambiare la massa del sistema.* Quindi se si scalda un pezzo di ferro oppure un gas, non c'è bisogno di sapere che forma abbia assunto l'energia al suo interno; basta sapere che l'energia è aumentata, per poter concludere che dev'essere aumentata anche la massa. Ma ciò non significa che siano aumentate le masse dei singoli atomi che costituiscono il gas. Esiste infatti un'altra proprietà fondamentale della massa: non è additiva. Intesa in questo modo, *la massa di un sistema non è la somma delle masse dei costituenti.*

La massa non è additiva

Infatti, se si tenta di salvare l'additività della massa, ci s'infila in un vero ginepraio di difficoltà. In primo luogo sorgono problemi con l'energia potenziale: a chi va attribuita? Sappiamo che non appartiene né a una particella né all'altra: ad es. l'energia potenziale del sistema Terra-Luna è della Terra o della Luna? Tuttavia nella massa complessiva del sistema conta anche l'energia potenziale. In questo caso sarà una quantità minuscola rispetto alle masse della Terra e della Luna, ma ciò non cambia la sostanza del problema.

Del resto se pensiamo invece a un nucleo il contributo dell'energia potenziale non è per niente trascurabile: la massa di un nucleo è sensibilmente minore dalla somma delle masse dei costituenti (questo è il vero "difetto di massa"). Prendiamo un nucleo di elio: è costituto da due protoni e due neutroni, e la somma delle masse sarebbe $2m_\mathrm{n} + 2m_\mathrm{p}$. Ma la massa della particella α è minore: la differenza è 28 MeV in unità di energia, pari a circa il 0.7%. Ciò vuol dire semplicemente che per prendere un nucleo di elio e farlo a pezzi, per separare i due protoni e i due neutroni, bisogna spendere energia; in altre parole, l'energia di un nucleo di elio fermo è minore della somma delle energie di due neutroni e di due protoni, anch'essi fermi, molto lontani tra loro.

Come mai succede questo? Nulla di strano: ci sono le forze nucleari, che sono attrattive (per capire questo non occorre la relatività). Se volete "smontare" il nucleo dovete fare lavoro, cedergli energia. Ma ciò che è vero per l'energia è vero anche per la massa: la massa del nucleo di elio sarà l'energia divisa per c^2, e quindi minore della somma delle masse di due protoni e due neutroni.

E se tentassimo di usare la cosiddetta massa relativistica, come dovremmo ragionare? Prima di tutto osserviamo che caso mai la massa relativistica dovrebbe crescere. I protoni e i neutroni dentro il nucleo di elio non stanno fermi; perciò le loro "masse relativistiche" saranno maggiori di quelle di quiete. In questo modo perciò verrebbe fuori un "eccesso di massa," anziché un difetto. Mi obietterete subito che i nucleoni hanno anche un'energia potenziale: il fatto che il nucleo è legato significa naturalmente che l'energia potenziale è negativa e in valore assoluto più grande dell'energia cinetica; sembra perciò che le cose possano tornare.

Ma se pretendiamo di far intervenire l'energia potenziale per cambiare le masse, nasce il problema che non si sa a chi attribuirla. Abbiamo quattro particelle che si attirano, e c'è un'energia di legame di 28 MeV: di chi è quest'energia? Non è di nessuna in particolare, è del sistema nel suo insieme. Quindi l'unica via d'uscita sensata è proprio di pensare solo alle masse di riposo, che hanno un significato preciso, invariante, indipendente dalle condizioni in cui le particelle si trovano; quando il sistema è legato la sua energia complessiva è minore di quella delle particelle separate, e quindi è minore anche la sua massa.

Nel caso di un gas va tutto al rovescio, perché il sistema non è legato, tanto è vero che se apro il recipiente le molecole scappano. In questo caso c'è energia cinetica, ma non c'è un'apprezzabile energia potenziale; quindi l'energia delle molecole è maggiore che se stessero ferme e perciò la massa complessiva del gas è maggiore della somma delle masse delle molecole.

In conclusione: la massa non è additiva, e inoltre non si conserva ... ma attenzione, è qui che si può scivolare: la massa non si conserva nel senso che *la somma delle masse non rimane sempre costante* durante un processo fisico. Ma ricordate che la somma delle masse non è la massa totale, perché quest'ultima misura l'energia complessiva, la quale ovviamente si conserva.

Esempio di una reazione chimica

Vediamo un altro esempio: dentro un recipiente isolato (e molto robusto!) ci sono idrogeno e ossigeno. A un certo momento inneschiamo la reazione chimica che forma acqua: se pesiamo il recipiente prima e dopo la reazione che cosa troveremo (ammesso di avere una bilancia che abbia la sensibilità necessaria)?

Se qualcuno, influenzato dai discorsi precedenti sull'energia di legame, ha pensato che la massa diminuisce, dovrebbe riflettere che il recipiente è chiuso, che niente può entrare o uscire, né energia né materia di nessun genere. D'altra parte la massa totale è l'energia totale divisa per c^2: allora è chiaro che *la massa totale non cambia*!

Se invece si lascia uscire calore, per riportare il sistema all'equilibrio termico con l'esterno, l'energia diminuisce e lo stesso accade alla massa. Per essere concreti, vediamo qualche numero: partiamo da 1 mole di O_2 e 2 moli di H_2 a condizioni normali: il volume occupato è 67.2 litri. L'entalpia di reazione (calore che occorre sottrarre perché la reazione avvenga in modo isobaro e isotermo) è 572 kJ. Alla fine avrò 36 grammi di acqua liquida, che occupano 36 cm^3 (sarà anche presente una piccola quantità di vapore).(1)

Se non sottraggo quei 572 kJ, e tengo costante il volume, l'acqua non diventa liquida, e il vapore va a oltre 7000 K, con pressione di 16 atm (ecco perché ci vuole un recipiente robusto!).(2) Il vapore di H_2O caldissimo ha la stessa energia della miscela iniziale: è aumentata l'energia cinetica delle molecole, ma l'energia potenziale interna *delle molecole* è diminuita (più negativa) il che vuol dire che la somma delle masse invarianti delle molecole è diminuita. La diminuzione relativa di massa si può stimare dall'entalpia di reazione:

$$\frac{572\,\mathrm{kJ}}{36\,\mathrm{g}\times c^2} = 1.8\cdot 10^{-10},$$

inapprezzabile con qualsiasi bilancia.

Se infine pensiamo alla somma delle masse delle particelle costituenti (elettroni e nuclei) certamente non è cambiata, in entrambi i casi: recipiente isolato o reazione isoterma.

Questo esempio mostra quanto sia facile imbrogliarsi; eppure le idee base sono semplici. La massa totale, intesa come energia, è costante se il sistema è isolato; ma se si lascia sfuggire dell'energia è chiaro che la massa decresce. Invece in una reazione chimica (in cui le particelle sono sempre le stesse, e ognuna mantiene immutata la sua massa) la somma delle masse invarianti delle singole particelle non cambia, anche se c'è stato un trasferimento di energia, anche se il gas si raffredda. Dato che non c'è una relazione immediata e diretta tra la somma delle masse e la massa totale (l'energia totale), la somma delle masse ha scarsa utilità pratica, e non conviene prestarci attenzione.

La massa relativistica nel decadimento del K^0

Nell'esempio del K^0, se si tira in ballo la massa relativistica le cose non fanno che diventare più confuse. Nel decadimento la somma delle masse (invarianti) diminuisce, mentre l'energia totale si conserva. L'energia iniziale era $m_\mathrm{K} c^2$; quella finale sarà $2\,m_\pi c^2\gamma$ (2 volte perché i due pioni hanno la stessa velocità). Abbiamo quindi:

$$m_\mathrm{K} = 2\,m_\pi\gamma, \tag{14–2}$$

dove $\gamma > 1$, perché i pioni si muovono; anzi questa relazione ci permette di calcolare γ. Abbiamo così risolto un piccolo problema di quella che impropriamente si chiama "cinematica relativistica": trovato γ è facile calcolare la velocità dei pioni.

Se uso invece la massa relativistica, la massa di un pione sarà $m' = m_\pi\gamma$. Quindi la (14–2) diventa $m_\mathrm{K} = 2m'$, cioè la somma delle masse è rimasta quella di prima.

Tutti coloro che parlano di massa relativistica dovrebbero almeno essere coerenti, e dire che la massa si conserva. Il che è ovvio, perché la massa relativistica è un altro

(1) Dato che stiamo tenendo costante il volume, il calore scambiato non sarà uguale alla variazione di entalpia, nella quale si tiene conto anche del lavoro a pressione costante. Però in questo caso il lavoro è inferiore a 7 kJ, ossia circa l'1% della variazione di entalpia, e possiamo trascurarlo.

(2) In realtà si tratta di un calcolo del tutto "teorico," per almeno due ragioni:

a) a quella temperatura l'acqua non resta legata, e si ridissocia in idrogeno e ossigeno;

b) è del tutto impossibile raggiungere la temperatura calcolata, perché basta un po' di calore ceduto al recipiente (che ha una capacità termica assai maggiore del gas) per raffreddare parecchio il gas stesso.

nome dell'energia (di riposo più cinetica). Decenza vuole perciò che non si dica contemporaneamente:

a) che la massa dipende dalla velocità;

b) che in un processo di questo genere c'è stata una "trasformazione di massa in energia."

La "trasformazione di massa in energia"

Ho già detto che a me non piace parlare di trasformazione di massa in energia, ma vediamo che cosa può voler dire. Nel nostro esempio c'è stata una diminuzione nella somma delle masse invarianti: perché? Inizialmente l'energia è $m_{\mathrm{K}}c^2$; alla fine possiamo scriverla nella forma $2\,m_\pi c^2 + 2\,T_\pi$. Confrontando, e dividendo per c^2, risulta

$$m_{\mathrm{K}} = 2\,m_\pi + 2\,T_\pi/c^2,$$

e questa possiamo leggerla nel senso che un po' della massa del K^0 è andata in energia cinetica dei pioni.

Fin qui non c'è niente di male; ma se si fa questo discorso, poi non si può parlare di massa relativistica: abbiamo già visto che la somma delle masse relativistiche si conserva. Se con dei ragazzi che certamente dovranno già fare un certo sforzo per capire, si fanno di queste confusioni, ognuno può immaginare che risultati si otterranno...

Chiediamoci inoltre: l'energia si conserva? Se sì, come può la massa "convertirsi" in energia? Vuol dire che l'energia aumenta? Per lo meno si dovrebbe dire che la massa si trasforma in energia cinetica, cioè che c'è stata una conversione tra energia sotto forma di "massa di riposo" ed energia cinetica. Ad ogni modo il mio punto di vista è che se tutte queste cose si evita di dirle è tanto di guadagnato, visto che non ce n'è nessun bisogno e il rischio di creare confusioni è molto alto. Le idee necessarie e sufficienti sull'argomento "massa ed energia" in relatività sono le seguenti:

1. l'energia si conserva
2. l'energia per un oggetto *in quiete* è sempre uguale a mc^2, e per un oggetto *in moto* a $mc^2\gamma$.

Nell'esempio del K^0 questo basta

a) per spiegare perché m_{K} non è uguale a $2m_\pi$;

b) per calcolare γ se conosciamo m_π e m_{K}.

Ed è tutto.

Se invece, essendo affezionati alla massa relativistica e alla trasformazione di massa in energia, cominciamo a infilare nel discorso $E = mc^2$ usata in tutti i possibili modi, dove m è un po' la massa relativistica e un po' la massa di riposo, E è un po' l'energia totale e un po' quella di riposo ... allora abbiamo trovato il modo sicuro per non far capire più niente.

Problemi

1. Calcolare la velocità dei pioni emessi nel decadimento $\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-$ (K^0 fermo).

Nel rif. in cui il π^+ è fermo, quali sono le velocità di π^- e K^0? Come si scrive il bilancio dell'energia in questo rif.?

2. Abbiamo visto nel problema 1 della lezione precedente che il Sole emette radiazione e.m. al ritmo di $4 \cdot 10^{33}$ erg/s e che la sua variazione relativa di massa, in un miliardo di anni, è $7 \cdot 10^{-5}$.

Perché diminuisce la massa del Sole?

3. Un litro di acqua (liquida) ha massa circa 1 kg. Se evapora (a temperatura costante) la sua massa cambia? Quanto? Perché?

4. Il trizio (isotopo 3 dell'idrogeno) è radioattivo β: emette un elettrone e un antineutrino e si trasforma in ^{3}He. Per le masse degli atomi si trovano i seguenti dati:

$$\begin{aligned} {}^3\mathrm{H}\ &:\ 2809.4327\,\mathrm{MeV} \\ {}^3\mathrm{He}\ &:\ 2809.4141\,\mathrm{MeV}. \end{aligned}$$

Calcolare la massima energia cinetica degli elettroni emessi.

Risposte

Problema 1. (Decadimento del K^0):

Non c'è che da usare la (14–2): $\gamma = m_\mathrm{K}/2\,m_\pi$ da cui

$$v = c\,\sqrt{1 - \frac{4m_\pi^2}{m_\mathrm{K}^2}} = 0.83\,c.$$

Nel rif. del π^+, ovviamente il K^0 ha velocità v (in modulo). Quanto alla velocità del π^-, il modo più diretto per calcolarla sarebbe la legge di trasf. delle velocità, che noi però non abbiamo mai scritta. Possiamo comunque arrivarci per via indiretta, come segue.

Scriviamo le solite leggi di conservazione:

$$E_\mathrm{K} = E_+ + E_- \qquad \vec{p}_\mathrm{K} = \vec{p}_+ + \vec{p}_-$$

(il significato dei simboli è ovvio). Nel rif. del π^+ abbiamo

$$\vec{p}_+ = 0 \qquad E_+ = m_\pi c^2$$

mentre

$$v_- = c^2\,\frac{p_-}{E_-} = c^2\,\frac{p_\mathrm{K}}{E_\mathrm{K} - E_+} = \frac{E_\mathrm{K}\,v}{E_\mathrm{K} - m_\pi c^2} = \frac{m_\mathrm{K}\gamma\,v}{m_\mathrm{K}\gamma - m_\pi}.$$

Non resta che sostituire per v e per γ le espressioni già trovate, per ottenere

$$v_- = c\,\frac{m_\mathrm{K}\sqrt{m_\mathrm{K}^2 - 4\,m_\pi^2}}{m_\mathrm{K}^2 - 2\,m_\pi^2} = 0.98\,c.$$

Il bilancio dell'energia è stato già scritto: c'è solo da osservare che in questo rif. il π^- ha tutta l'energia cinetica, che proviene in parte da quella del K^0, in parte dai 218 MeV della differenza di massa tra il K^0 e i due pioni.

Problema 2. (Massa del Sole):

La risposta è quasi banale: la massa diminuisce perché dimiuisce l'energia (siamo nel rif. in cui il Sole è fermo, e resta fermo).

Chi sia affezionato alla massa relativistica, dirà invece: la massa diminuisce perché la radiazione emessa porta via massa. Infatti i fotoni hanno massa (relativistica) pari alla loro energia divisa per c^2.

Anche dal punto di vista della costituzione interna del Sole, le due descrizioni sono diverse. Assumiamo per semplicità che dal Sole non esca nient'altro, tranne fotoni.

Dimentichiamo anche le reazioni nucleari, in modo che il numero di particelle (elettroni, protoni, nuclei) non cambi nel tempo. Allora il punto di vista che ho qui sostenuto dice che le masse di tutte queste particelle non cambiano, ma la massa del Sole *non è* la somma di queste masse; quella che cambia è l'energia (cinetica + potenziale).

Invece chi difende la massa relativistica dirà che la massa del Sole è la somma delle masse (relativistiche) delle particelle costituenti. Con questo avrà messo in conto le energie cinetiche, ma dovrà poi attribuire (misteriosamente, secondo me) una massa *negativa* alle energie potenziali, per far tornare i conti.

Problema 3. (Evaporazione dell'acqua):

Stiamo supponendo che l'acqua si trovi in un recipiente col solito pistone, in modo che la pressione resti costante mentre il volume aumenta man mano che l'acqua evapora. (Si ricordi che la costanza della pressione è condizione necessaria per avere evaporazione a temperatura costante.) Supponiamo per es. che la pressione esterna sia quella atmosferica standard; il che vuol dire che la temperatura è 100°C.

Il calore di evaporazione (che più correttamente andrebbe detto "entalpia di evaporazione") è il calore che si deve cedere per far evaporare l'unità di massa: per l'acqua a 100°C vale $2.26 \cdot 10^6$ J/kg. Però questo calore non va tutto ad aumentare l'energia interna dell'acqua: dato l'aumento di volume, c'è da tener conto del lavoro fatto contro la pressione esterna.

L'aumento di volume si calcola assumendo che il vapore sia approssimativamente un gas perfetto. Dato che 1 kg di acqua sono 44.6 mol, il volume occupato dal vapore è $1.24\,\mathrm{m}^3$, mentre il volume iniziale, che è un litro, è trascurabile. Il lavoro fatto è $1.25 \cdot 10^5$ J.

L'energia interna aumenta di $2.26 \cdot 10^6 - 1.25 \cdot 10^5 = 2.13 \cdot 10^6$ J; ne segue che l'incremento di massa vale $2.4 \cdot 10^{-11}$ kg.

Dato che la temperatura non è cambiata, possiamo assumere che non sia neppure cambiata l'energia cinetica delle molecole. Dunque l'aumento di massa è da attribuire alla differenza di energia potenziale: negativa nell'acqua liquida, praticamente nulla nel vapore.

Problema 4. (Decadimento β del trizio):

Come si dice nell'enunciato del problema, il decadimento avviene con la reazione

$$ {}^3\mathrm{H} \to {}^3\mathrm{He} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}. $$

All'inizio avremo un atomo neutro, ossia il nucleo ^{3}H e un elettrone legato (energia di legame 13.6 eV); alla fine l'elettrone emesso dal nucleo non resterà legato nell'atomo, che quindi si trasformerà in uno ione ${}^3\mathrm{He}^+$. Invece i dati sulle masse si riferiscono in entrambi i casi ad atomi neutri, e ci dicono che un atomo ^{3}H ha energia maggiore di ^{3}He, per 18.6 keV.

Tuttavia la differenza di energia tra un atomo neutro ^{3}He e l'insieme ${}^3\mathrm{He}^+ + \mathrm{e}^-$, con elettrone distante dallo ione e fermo, ossia l'energia di prima ionizzazione dell'atomo, è circa 25 eV, quindi piccolissima alla scala di energie che stiamo considerando, e possiamo trascurarla. Perciò il dato 18.6 keV rappresenta anche la differenza di energia tra ^{3}H e ${}^3\mathrm{He}^+ + \mathrm{e}^-$ (con elettrone fermo).

Il problema chiede la *massima* energia dell'elettrone; la ragione è che l'energia disponibile si ripartisce tra elettrone e antineutrino. L'elettrone avrà energia massima quando l'antineutrino ha energia nulla (a questa scala la massa dell'antineutrino, se non è nulla, è certamente trascurabile), perciò la risposta è 18.6 keV.

A rigore si dovrebbe anche tener conto del rinculo dello ione, ma dato il rapporto di masse, circa 1 a 7000, l'energia cinetica dello ione è per 4 ordini di grandezza inferiore a quella dell'elettrone.

LEZIONE 15

L'Universo: dati di osservazione

Passiamo ora all'argomento più moderno e senza dubbio più affascinante: la cosmologia. Si tratta però di un fascino ambiguo, in quanto spinge spesso ad affrontarlo fuori del giusto contesto, e in modo sostanzialmente non scientifico. È forse superfluo sottolineare che questo *è un argomento di fisica*, e come tale va trattato: in particolare non si può discuterne senza avere qualche idea sui dati di fatto e su come li si ottiene. Perciò incominceremo proprio da qui.

Per una prima visione d'insieme, vediamo alcuni risultati, su cui torneremo più avanti con maggior dettaglio:

– il raggio della Terra è poco inferiore a 6400 km: questa lunghezza è la base di tutte le distanze astronomiche
– la Terra dista dal Sole 500 secondi-luce $\simeq 150 \cdot 10^6$ km $= 1.5 \cdot 10^{11}$ m (l'*unità astronomica* UA)
– il Sole è una stella piuttosto piccola, posta a circa $3 \cdot 10^4$ al (anni-luce) dal centro della Galassia in cui ci troviamo
– la materia visibile dell'Universo è sostanzialmente concentrata in *galassie*, in numero di $\sim 10^{11}$
– ogni galassia contiene gas, polveri e stelle; queste ultime in numero di $\sim 10^{11}$, e distanti fra loro alcuni anni-luce in media
– distanza media fra le galassie: $\sim 10^7$ al; tuttavia le distanze sono tutt'altro che uniformi, poiché le galassie sono raccolte in *ammassi*
– l'Universo visibile ha "dimensioni" dell'ordine di 10^{10} al.

La scala delle distanze: la parallasse

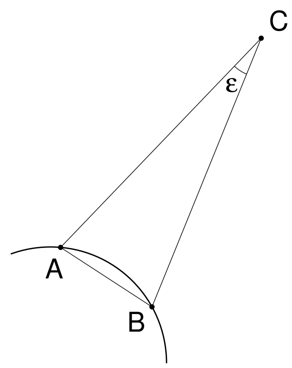


fig. 15–1

Dalle dimensioni della Terra a quelle dell'Universo vi sono molti ordini di grandezza: ne segue che non è possibile applicare lo stesso procedimento di misura in tutti i casi. Un metodo di misura arriva fino a un certo limite, oltre il quale viene rimpiazzato da un altro: i due metodi debbono avere un campo di applicazione comune, affinché sia possibile la "saldatura." Si hanno così tanti "scalini" che formano la scala delle distanze, da quelle terrestri a quelle cosmologiche.

I primi due scalini sono la *parallasse diurna* e la *parallasse annua*. Se A e B (fig. 15–1) sono due osservatori sulla superficie terrestre, la loro distanza è nota. Nel caso semplice di un triangolo isoscele, con angolo in C piccolo, sarà con buona approssimazione $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} \cdot \varepsilon$ (se ε è espresso in radianti) e perciò la misura di ε fornisce quella di BC.

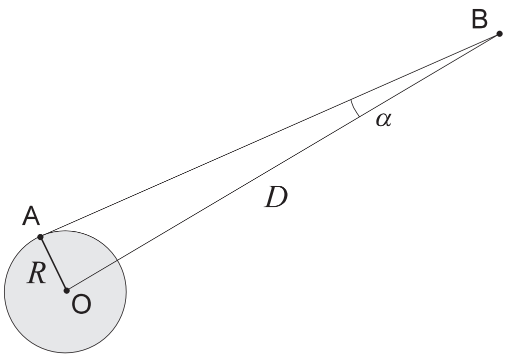


fig. 15–2

Più esattamente, si chiama parallasse diurna di un oggetto celeste l'angolo α in fig. 15–2, dove O è il centro della Terra e l'angolo in A è retto. Si vede che

$$R = D \sin\alpha \simeq D\,\alpha$$

perché l'angolo α nella maggior parte dei casi è piccolo. Perciò $D = R/\alpha$.

Esempi:

– per la Luna $\alpha \simeq 1^\circ$
– per il Sole $\alpha \simeq 9''$.

Con la parallasse diurna si possono determinare soltanto le distanze dentro il sistema solare, e in particolare è stata determinata storicamente la distanza Terra-Sole. In realtà esistono diversi altri metodi; oggi le misure più precise sui pianeti si fanno mediante echi radar (il primo eco radar dalla Luna è stato ricevuto nel 1946).

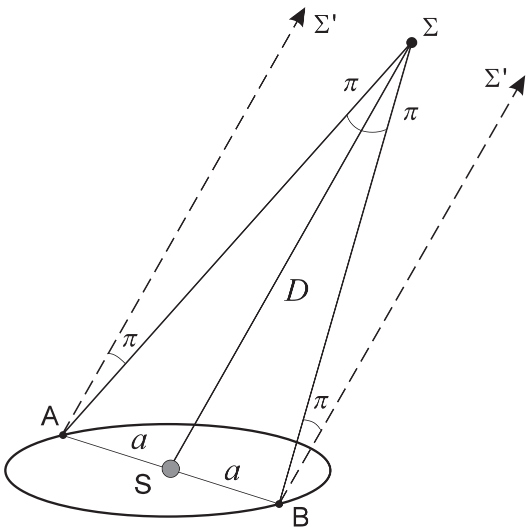


fig. 15–3

La conoscenza dell'unità astronomica permette di allungare la base della parallasse: in fig. 15–3 i punti A e B sono gli estremi di un diametro dell'orbita terrestre, S è il Sole, Σ una stella vicina, Σ' una molto lontana. Si vede che

$$a = \overline{\mathrm{SA}} = \overline{\mathrm{S}\Sigma} \cdot \pi = D\,\pi$$

e perciò $D = a/\pi$. L'angolo π (parallasse annua) si determina confrontando, nel corso di un anno, la direzione di Σ con quella di Σ'. Per tutte le stelle $\pi < 1''$; l'unità *parsec* (pc) è la distanza D quando $\pi = 1''$:

$$1\,\mathrm{pc} \simeq 2.06 \cdot 10^5\,\mathrm{UA} \simeq 3 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} \simeq 3.3\,\mathrm{al}.$$

Oggi la parallasse annua si può determinare da terra fino a 100 pc, e grazie ai telescopi su satelliti fino a circa 1000 pc; al di là l'angolo è troppo piccolo per essere misurato in modo attendibile. Si stima che questo raggio includa qualche centinaio di milioni di stelle.

La distanza ricavata dalla luminosità

Si dice *luminosità assoluta* di una stella la potenza totale irradiata: ad es. la luminosità assoluta del Sole integrata su tutte le lunghezze d'onda (*bolometrica*) è $4 \cdot 10^{26}$ W. A parità di luminosità assoluta, stelle poste a distanza diversa appaiono diversamente brillanti, in proporzione inversa al quadrato della distanza:

$$I = \frac{L}{4\pi D^2}\,.$$

Si può perciò definire una *luminosità apparente*, che per una data stella è la luminosità assoluta che dovrebbe avere una stella fittizia messa a una distanza convenzionale fissa, per apparire ugualmente brillante di quella data. Come distanza convenzionale si assume 10 pc (non chiedetemi perché) e perciò

$$L_{\mathrm{app}} = L_{\mathrm{ass}} \left(\frac{10\,\mathrm{pc}}{D}\right)^2.$$

Per qualsiasi stella le osservazioni forniscono facilmente I e quindi L_{app}; se si conoscesse L_{ass} se ne potrebbe ricavare D. Ciò in molti casi è possibile dall'esame delle caratteristiche spettrali della luce emessa.

I criteri che si usano sono abbastanza complessi, ma una descrizione sostanzialmente corretta, anche se molto semplificata, è la seguente: *stelle che emettono luce di uguale distribuzione spettrale hanno la stessa luminosità assoluta*. In questa forma abbreviata sono incluse sia la *classe spettrale* (che si ricava dalle righe spettrali presenti) sia la *classe di luminosità* (che si ottiene ad es. dall'intensità e dalla forma delle righe).

Così se si conosce — attraverso la parallasse — la distanza di una di queste stelle, se ne può ricavare quella di molte altre. In tal modo si arriva a oltre 10^4 pc, ma ancora non si esce dalla Galassia.

Variabili regolari e novæ

Tra i molti tipi di stelle variabili ve ne sono due che hanno importanza per il nostro discorso: le *Cefeidi* e le *novæ*. Le Cefeidi sono una classe di variabili *regolari*, che cioè variano di luminosità in modo periodico (con periodi di alcuni giorni). Hanno acquisito interesse cosmologico quando si è scoperto che il periodo di una Cefeide è correlato alla sua luminosità assoluta. Una volta stabilita una “curva di taratura” con Cefeidi di distanza nota, la semplice misura del periodo permette di conoscere la luminosità assoluta, e di qui si risale alla distanza. Con le Cefeidi si possono misurare distanze fino a circa 1 Mpc: siamo fuori dalla nostra Galassia, e si raggiungono altre galassie, quelle del cosiddetto “gruppo locale,” che conta una ventina di membri.

Le novæ (da non confondere con le *supernovæ* di cui parleremo più avanti) sono variabili *cataclismiche*, cioè stelle che aumentano bruscamente e fortemente di luminosità (probabilmente in seguito all'apporto di materia da un'altra stella con cui la nova forma un sistema binario) e tornano poi alle condizioni originarie entro un tempo che si misura in giorni. Il tempo di smorzamento è correlato con la luminosità al massimo. Poiché una nova al massimo è assai più luminosa di una Cefeide, può essere vista a distanza maggiore: si arriva così a $\sim 50\,\mathrm{Mpc}$, includendo l'ammasso di galassie detto “della Vergine” dalla costellazione in cui si trova. In tal modo possiamo misurare le distanze di migliaia di galassie, ma siamo ancora lontani dalla scala cosmologica.

Le galassie lontane

Nelle galassie più lontane non si riesce a distinguere singole stelle, e questo obbliga a cambiare il tipo di “lampada campione” usato come indicatore di distanza: dalle stelle all'intera galassia. Lo studio di numerosi ammassi porta a scoprire una certa regolarità, e a fare l'ipotesi che nei diversi ammassi la galassia più luminosa abbia sempre la stessa luminosità assoluta. Poiché le distanze nell'ammasso della Vergine sono note, si arriva così a valutare le distanze degli altri ammassi dalla misura della luminosità apparente della galassia più brillante di ciascun ammasso. In tal modo si raggiungono distanze di $\sim 2 \cdot 10^9\,\mathrm{pc} \simeq 7 \cdot 10^9\,\mathrm{al}$: questa è veramente una scala cosmologica.

Un altro metodo usato su scala cosmologica si basa sulle *supernovæ*. Queste sono vere e proprie esplosioni, in cui una stella, giunta alla fine della sua evoluzione, si espande violentemente e disperde gran parte della sua materia nello spazio (resta solo un piccolo nucleo, che può andare a formare una stella di neutroni o forse un buco nero). Nella fase di esplosione la stella aumenta enormemenente di luminosità, ed è visibile a grande distanza: con tecniche analoghe a quelle descritte per le novæ, ossia basate sull'andamento della *curva di luce*, si può ricavare una stima della luminosità assoluta, e quindi della distanza.

Va però detto che sulle distanze misurate con questi metodi esiste ancora grande incertezza, che si riflette, come vedremo, sull'interpretazione delle osservazioni e sul confronto con i modelli cosmologici.

La massa delle galassie e la densità di materia

Per discutere i modelli cosmologici è essenziale conoscere la densità della materia nell'Universo. Ciò richiede di conoscere la massa delle galassie: dobbiamo dunque sapere come si determina questo parametro.

Ricordiamo prima di tutto come si trova la massa del Sole $M_\odot$. La velocità orbitale della Terra è $v_\oplus = 2\pi r_\oplus / T_\oplus$ dove $r_\oplus$, $T_\oplus$ sono raggio e periodo dell'orbita (trascuriamo l'eccentricità). La forza necessaria per il moto circolare della Terra (forza centripeta) è $F = M_\oplus v_\oplus^2 / r_\oplus$, ed è fornita dall'attrazione del Sole:

$$\frac{M_\oplus v_\oplus^2}{r_\oplus} = \frac{G M_\odot M_\oplus}{r_\oplus^2}$$

da cui

$$M_\odot = \frac{v_\oplus^2 r_\oplus}{G} = \frac{4\pi^2 r_\oplus^3}{G\,T_\oplus^2}. \tag{15–1}$$

Le grandezze $r_\oplus$, $T_\oplus$ sono note da misure astronomiche; la costante di gravitazione G si ottiene da misure di laboratorio (Cavendish) e ne risulta

$$M_\odot = 1.99 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}.$$

È interessante osservare che da questo dato, e dal raggio del Sole, pure ben noto, si può calcolare la *densità media*: $\bar{\varrho} = 1.4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, poco maggiore di quella dell'acqua.

Nello stesso modo si può determinare la massa di un pianeta che abbia almeno un satellite: ad es. Saturno, usando il suo satellite maggiore, Titano. Avremo

$$M_\mathrm{S} = \frac{4\pi^2 r_\mathrm{T}^3}{G\,T_\mathrm{T}^2} \tag{15–2}$$

o anche, dividendo la (15–2) per la (15–1)

$$\frac{M_\mathrm{S}}{M_\odot} = \left(\frac{T_\oplus}{T_\mathrm{T}}\right)^2 \left(\frac{r_\mathrm{T}}{r_\oplus}\right)^3. \tag{15–3}$$

E se il pianeta non ha satelliti, come ad es. Venere? Non c'è altro modo che ricorrere alle perturbazioni che esso produce sul moto di altri pianeti.

Possiamo ottenere la massa della nostra Galassia usando il fatto che il Sole gira intorno al centro di questa, con un periodo $T_\odot = 2.5 \cdot 10^8$ anni, a una distanza $r_\odot = 10^4$ pc. Naturalmente il tempo $T_\odot$ è troppo lungo per determinarlo direttamente, ma si può misurare $v_\odot$, e poi $T_\odot = 2\pi r_\odot / v_\odot$. Applicando la (15–3), con la Galassia al posto di Saturno e col Sole al posto di Titano:

$$\frac{M_\mathrm{G}}{M_\odot} = \left(\frac{T_\oplus}{T_\odot}\right)^2 \left(\frac{r_\odot}{r_\oplus}\right)^3 = \left(\frac{1}{2.5 \cdot 10^8}\right)^2 \left(10^4 \cdot 2 \cdot 10^5\right)^3 \simeq 1.3 \cdot 10^{11}$$

(ricordate che $1\,\mathrm{pc} \simeq 2 \cdot 10^5$ UA).

Dunque la massa della Galassia sarebbe pari a circa 100 miliardi di Soli: è solo questo che s'intende quando si dice che nella Galassia ci sono 100 miliardi di stelle, visto che nessuno le ha contate!

È bene osservare che applicando la (15–3) alla Galassia abbiamo in realtà fatto un'approssimazione. La (15–3) vale per un satellite che gira intorno a un corpo di forma sferica: la Galassia non è sferica, e inoltre il Sole ne fa parte. L'approssimazione è lecita se si ammette che gran parte della massa della Galassia sia concentrata in un nucleo centrale, abbastanza sferico, mentre il Sole è una stella piuttosto "periferica."

Lo stesso metodo si può applicare ad altre galassie, a condizione che si possa determinare il moto di qualche stella. La distanza dal centro non è un problema, quando si conosca la distanza della galassia da noi; la velocità si ottiene dall'esame dello spettro della stella, con l'effetto Doppler.

A questo punto, per stimare la densità della materia nell'Universo basta sapere quante sono le galassie per unità di volume, e conoscerne la massa media. Naturalmente è essenziale l'ipotesi che non ci sia massa apprezzabile al di fuori di quella concentrata nelle galassie. Mettendo insieme tutti i dati, si ottiene una stima di $10^{-28}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

La massa mancante

Non posso chiudere questo argomento senza accennare al "problema della massa mancante." Abbiamo visto sopra come si determina la massa della Galassia, nell'ipotesi che questa sia concentrata nel nucleo. Negli ultimi anni, proprio misurando le velocità di stelle nelle galassie a spirale, a varie distanze dal centro, si sono accumulate le prove che debba esservi della materia distribuita anche molto al di fuori del nucleo. Si tratta di materia non luminosa, e non è affatto chiaro quale sia la sua natura.

Ma come sappiamo che questa massa esiste? Riprendiamo la (15–2), scritta per una galassia:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} \tag{15–3}$$

dove r è il raggio dell'orbita circolare di una stella della galassia, e T il suo periodo. Si vede che per le diverse stelle r^3/T^2 è costante (terza legge di Keplero). Introducendo la velocità della stella, che si misura più direttamente:

$$M = \frac{v^2 r}{G}. \tag{15–4}$$

da cui $v \propto 1/\sqrt{r}$.

Misurando v per stelle a diverse distanze dal centro della galassia, ci si aspetta dunque un andamento come quello tratteggiato in fig. 15–4 (il tratto iniziale crescente è dovuto al fatto che in vicinanza del centro non tutta la massa della galassia è efficace nel produrre il campo gravitazionale). Invece le osservazioni, su molte galassie, danno risultati come quello accennato con la linea intera: velocità pressoché costante anche a grandi r. Questo mostra che la massa nella (15–4) non è affatto costante, ma cresce come r, sebbene alla periferia della galassia la luce visibile indichi una densità di stelle molto minore che nel nucleo. Si tratta dunque di materia *oscura.*

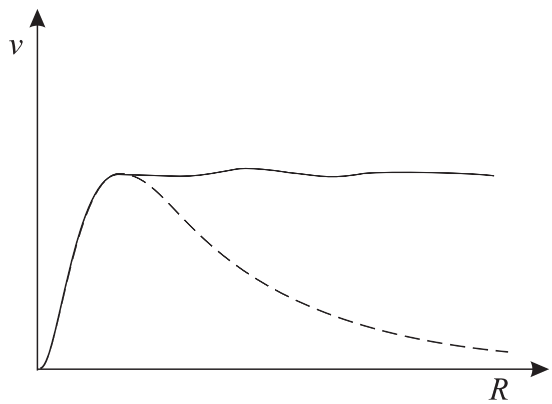


fig. 15–4

Anche negli ammassi di galassie c'è evidenza di materia oscura: infatti in vari casi le velocità relative delle galassie sono troppo alte perché l'ammasso possa essere tenuto legato dalla sola azione gravitazionale della materia visibile. Tutto ciò porta a ritenere che la stima fornita sopra per la densità di materia nell'Universo sia sbagliata per difetto almeno per un fattore 10, ma il problema è completamente aperto.

La legge di Hubble

La questione di cui vogliamo ora occuparci nasce quando ci si mette a studiare le galassie e si cerca di raccogliere informazioni sulle loro distanze e sul loro moto. In un primo tempo, finché ci si limita alle galassie più vicine, si trova che si muovono in maniera abbastanza caotica, e non sembra che dai loro moti si possa estrarre una legge semplice. Negli anni '20, ad opera principalmente di Hubble (e grazie al telescopio di due metri e mezzo di Monte Wilson, costruito proprio per consentire osservazioni di questo genere) si scoprì che la luce di galassie lontane è *spostata verso il rosso* (redshift cosmologico) e che lo spostamento è proporzionale alla distanza della galassia. Questa è la *legge di Hubble.*

È importante aver chiaro che la legge di Hubble è di tipo statistico, e può essere scoperta — e soprattutto ben verificata — solo quando si hanno a disposizione un numero sufficientemente grande di galassie abbastanza lontane. Per le galassie vicine l'effetto è più difficile da vedere: in primo luogo perché se lo spostamento è proporzionale alla distanza, per quelle vicine sarà piccolo. Poi perché a questo spostamento che possiamo dire sistematico, si sovrappone un effetto di "agitazione termica": i moti casuali, disordinati, delle galassie possono essere così grandi da produrre un effetto Doppler che maschera il redshift cosmologico. Di qui la necessità di un grosso telescopio: se non si riesce a guardare abbastanza lontano, il redshift non è abbastanza grande.

Vediamo qualche numero. Le velocità tipiche delle galassie di un ammasso sono dell'ordine di $10^3\,\mathrm{km/s}$, e producono quindi uno spostamento Doppler disordinato (rumore) $\Delta\lambda/\lambda = v/c \sim 0.003$. Dato il valore della costante di Hubble (v. dopo) per avere un redshift nettamente al disopra del rumore, per es. 0.01, occorre andare a distanze $> 50\,\mathrm{Mpc}$.

La costante di Hubble

Per stabilire una legge del genere bisogna evidentemente misurare, per ciascuna galassia, il redshift e la distanza. Delle due la distanza è la più difficile da misurare, perché — come abbiamo visto — occorre procedere per passi successivi: prima si determinano le distanze delle stelle; poi da queste si comincia a risalire alle galassie più vicine; da quelle più vicine s'impara qualcosa che permette di passare alle galassie più lontane, ecc. Il risultato è che la misura della distanza è assai indiretta, e perciò soggetta a una quantità di possibili errori.

Sta di fatto che ancor oggi l'incertezza delle distanze è il punto debole di tutto l'argomento. Quando si sente dire che un certo parametro cosmologico è incerto per $\pm 20\%$, la difficoltà essenziale è sempre quella: la determinazione della distanza diventa tanto più difficile, e tanto più incerta come fondamento, quanto più si va lontano. E purtroppo le grandi distanze sono le più utili per capire la struttura dell'Universo.

Invece non è difficile determinare il redshift: la luce che viene da una galassia è la somma della luce emessa da tutte le stelle della galassia, e nella luce delle stelle ci sono le righe di assorbimento. Queste righe sono dovute a determinati atomi o ioni, e le loro lunghezze d'onda sono conosciute da misure di laboratorio. Un esempio può essere la riga H_α, la prima riga della serie di Balmer dell'idrogeno: la sua lunghezza d'onda di laboratorio è ben nota. È lecito assumere che nelle condizioni delle stelle che costituiscono le galassie la lunghezza d'onda non cambi, perché gli atomi d'idrogeno sono sempre gli stessi.

Occorre sottolineare questo principio fondamentale: la fisica degli atomi d'idrogeno nelle stelle di una galassia lontana milioni o miliardi di anni luce è la stessa che conosciamo sulla Terra. Il *principio di uniformità* delle leggi di natura in tutto l'Universo è essenziale per il nostro argomento: senza di esso non faremmo un passo avanti.

Dunque la lunghezza d'onda λ_e della riga H_α nella luce della galassia è la stessa che noi misuriamo in laboratorio. D'altra parte noi osserviamo la galassia allo spettroscopio e misuriamo la lunghezza d'onda λ_r della luce ricevuta: risulta $\lambda_\mathrm{r} > \lambda_\mathrm{e}$. Ripeto che non possiamo misurare λ_e nella galassia: assumiamo di conoscerla perché l'identifichiamo con la lunghezza d'onda della riga H_α dell'idrogeno in laboratorio. Quindi abbiamo due misure: una è fatta sulle righe spettrali degli elementi in laboratorio; l'altra si ricava dallo spettro della luce che viene dalla galassia. Confrontando questa con quella, si può calcolare la variazione relativa

$$z = \frac{\lambda_\mathrm{r} - \lambda_\mathrm{e}}{\lambda_\mathrm{e}} \tag{15–5}$$

che si chiama "parametro di redshift." Redshift, ossia spostamento verso il rosso, appunto perché la lunghezza d'onda è aumentata.

L'interpretazione più elementare è che il redshift sia dovuto a un moto di allontanamento della galassia con una certa velocità, sia cioè anch'esso un effetto Doppler: allora il redshift sarà uguale, al primo ordine, a v/c. Se la velocità di allontanamento non fosse piccola rispetto a quella della luce, si dovrebbe far uso della formula relativistica, che è un po' più complicata; ma per il momento non ce ne preoccupiamo. (Ho messo le mani avanti parlando di "interpretazione più elementare," perché non è quella che meglio si accorda con i modelli cosmologici; basti per ora quest'avvertenza, ma ne riparleremo.)

Con ciò non intendo dire che l'effetto relativistico sia trascurabile in generale: si conoscono oggetti per i quali $z > 4$.(1) Un tale redshift sarebbe impossibile se fosse sempre $z = v/c$, perché implicherebbe una velocità maggiore di c. Tuttavia ai tempi di Hubble il campo delle distanze accessibili era tale che le velocità erano sempre piccole, e il problema non si poneva.

Se la causa del redshift è nell'effetto Doppler, z è dunque proporzionale alla velocità; d'altra parte le osservazioni ci dicono che z è proporzionale alla distanza d: quindi v è proporzionale a d. Abbiamo così trovato la legge di Hubble nella forma più consueta. In termini quantitativi:

$$v = Hd \tag{15–6}$$

dove la costante di proporzionalità H è la *costante di Hubble.* Il valore di H, quale risulta dalle osservazioni, è $(65 \pm 13)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.(1)

Unità di misura e valore di H

Questa strana unità di misura richiede una spiegazione: è conseguenza di certe convenzioni pratico-strumentali. Come si vede dalla (15–6), la costante di Hubble ha le dimensioni dell'inverso di un tempo; quindi la sua unità di misura sarebbe il $\mathrm{s^{-1}}$. Ma come abbiamo visto il megaparsec è un'unità di lunghezza: la lunghezza al numeratore e quella al denominatore si cancellano e rimane un tempo al denominatore, come doveva.

La ragione di questa unità è che in astronomia la velocità di allontanamento di una stella o di una galassia si misura comunemente in km/s, perché l'ordine di grandezza tipico delle velocità stellari è qualche decina di km/s. D'altra parte il megaparsec (abbreviato Mpc) è un'unità di distanza ragionevole per le galassie: ad es. la famosa galassia di Andromeda è a 0.7 Mpc, pari a poco più di 2 milioni di anni-luce.

Quanto al valore numerico di H, a causa delle incertezze sulle distanze oggi nessuno può darlo per certo più che entro il 20%.(1) Può sembrare una situazione poco soddisfacente, ma non bisogna dimenticare che a volte anche conoscere un numero entro il 20% è già molto importante. Tra i fisici c'è un famoso detto: "meglio un cattivo numero che nessun numero" (traduzione letterale dall'inglese: in italiano direi "anche un cattivo numero è meglio di niente"). Vuol dire che è sempre meglio conoscere il valore numerico di una grandezza entro il 20%, che dover dire: "non ne so niente."

Dato che H è l'inverso di un tempo, è interessante calcolare $1/H$, che si chiama "tempo di Hubble": si trova qualcosa come $15 \cdot 10^9$ anni. Ecco un esempio dei tempi che entrano in ballo nei discorsi cosmologici: miliardi e decine di miliardi di anni. Ma questa è una cosa su cui dovremo tornare più avanti; per adesso si tratta solo di una conversione di unità di misura, senza nessun profondo significato.

Relatività dell'effetto di espansione

La prima considerazione importante da fare è che il moto generale di allontanamento delle galassie non significa affatto che noi ci troviamo al centro dell'Universo: che la nostra posizione sia in qualche modo particolare.

---

(1) Oggi (2005) sono noti oggetti con redshift $z \simeq 10$. Un valore più aggiornato della costante di Hubble è $(70 \pm 3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

Questo si può vedere in maniera elementare considerando il triangolo formato dall'osservatore O sulla Terra e da due altri osservatori, O_1 e O_2, su due galassie lontane (fig. 15–5). Chiamiamo d_1 e d_2 le distanze $\overline{OO_1}$ e $\overline{OO_2}$ rispettivamente; allora la legge di Hubble ci dice che d_1 cresce col tempo, e più precisamente che

$$d_1(t) = d_1(0) + v_1 t = d_1(0)\,(1 + Ht).$$

Lo stesso vale per d_2:

$$d_2(t) = d_2(0) + v_2 t = d_2(0)\,(1 + Ht).$$

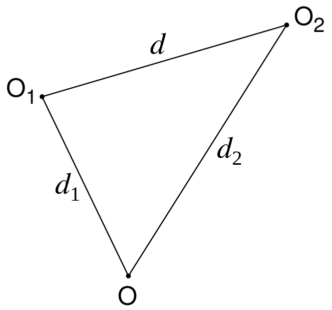


fig. 15–5

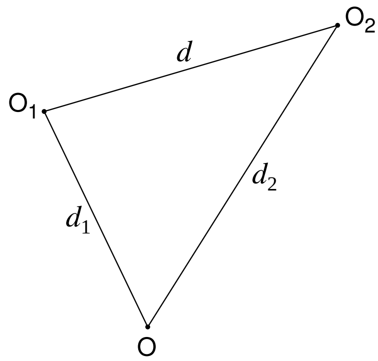


fig. 15–6

Se quindi andiamo a rifare la figura al tempo t (fig. 15–6) troviamo un nuovo triangolo simile a quello di prima, perché i due lati OO_1 e OO_2 si sono allungati in proporzione, e l'angolo compreso non è cambiato. Ne segue che anche la distanza $\overline{O_1O_2}$ è cresciuta nella stessa proporzione:

$$d(t) = d(0)\,(1 + Ht).$$

Dunque anche gli astronomi della galassia 1 troverebbero la legge di Hubble, come l'abbiamo trovata noi. E lo stesso vale per gli astronomi della galassia 2. Nessuna di queste galassie occupa una posizione privilegiata: nessuno degli osservatori può dire che l'Universo si espande intorno a lui, e che lui sta al centro: si tratta solo di un moto relativo.

Problemi

1. La massima elongazione di Venere dal Sole è 46.3°. Si è misurata l'eco radar quando l'elongazione era 35.0°, e si è trovato 381.4 s (fig. 15–7).

Supposte circolari le orbite dei due pianeti, ricavare da questi dati l'unità astronomica.

2. È stato proposto (Milgrom) che l'andamento di velocità in una galassia mostrato dalla fig. 15–4 si possa spiegare assumendo che la legge di gravitazione di Newton non valga per accelerazioni molto piccole.

Che forma dovrebbe assumere la legge per dare ragione dell'andamento costante della velocità?

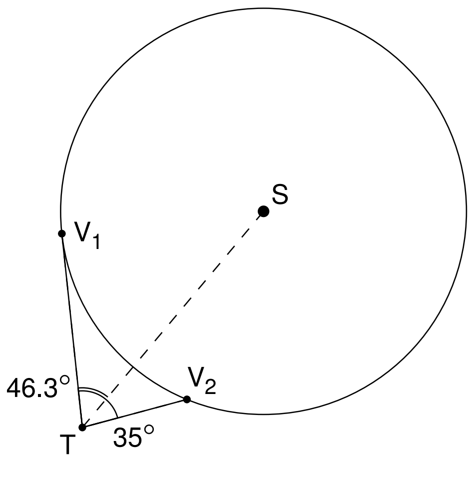


fig. 15–7

3. Che effetto avrebbe sulla costante di Hubble un errore del 20% in meno sulla stima della luminosità degli oggetti lontani?

4. Sono stati osservati oggetti con $z = 4$ (e anche maggiore). Quale dovrebbe essere la loro distanza?

Esaminare criticamente la domanda e le possibili soluzioni.

Risposte

Problema 1. (Venere e l'unità astronomica):

Indichiamo con $\alpha = 46.3°$ l'angolo di massima elongazione, con $\beta = 35.0°$ quello al quale è stata fatta la misura di eco; con a il raggio dell'orbita della Terra (unità astronomica) e con a' quello dell'orbita di Venere; con b la distanza TV_2.

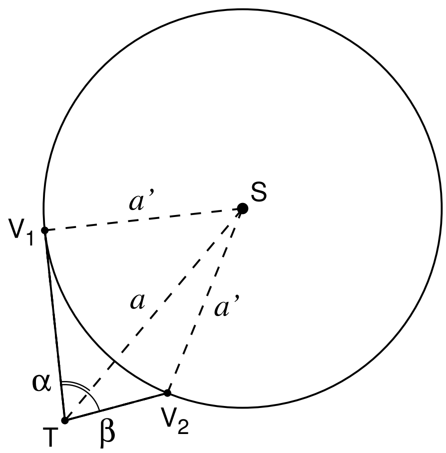


fig. 15–8

Dalla fig. 15–8 si vede che

$$a' = a \sin\alpha \qquad a'^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\beta.$$

Sostituendo nella seconda a' dato dalla prima:

$$a^2\cos^2\alpha - 2\,ab\cos\beta + b^2 = 0$$

$$a = b\,\frac{\cos\beta + \sqrt{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}}{\cos^2\alpha}$$

(va scelto il segno + perché $a\cos^2\alpha > b\cos\beta$).

Mettendo i numeri, risulta

$$b = 5.72\cdot 10^7\,\mathrm{km} \qquad a = 1.508\cdot 10^8\,\mathrm{km} \qquad a' = 1.090\cdot 10^8\,\mathrm{km}.$$

Il valore "ufficiale" di a è $1.496\cdot 10^8$ km: la differenza. inferiore all'1%, è presumibilmente dovuta all'aver trascurato l'eccentricità delle orbite.

Problema 2. (Modifica alla legge di gravitazione):

Detto g il campo gravitazionale newtoniano

$$g = \frac{GM}{r^2} \tag{15–7}$$

la proposta di Milgrom è di porre, invece di $g = a$

$$g = a\,f\left(\frac{a}{a_0}\right) \tag{15–8}$$

dove a_0 è una nuova costante universale, con le dimensioni di un'accelerazione, e $f(x)$ è una funzione che tende a 1 quando l'argomento $x = a/a_0$ è $\gg 1$. Dobbiamo vedere che cosa si può dire sulla funzione $f(x)$.

Da $a = v^2/r$ si trae $r = v^2/a$, che con la (15–7) dà

$$g = \frac{GMa^2}{v^4}.$$

Sostituendo nella (15–8)

$$f\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{GMa}{v^4}.$$

$$f(x) = \frac{GMa_0}{v^4}\,x. \tag{15–9}$$

Le osservazioni ci dicono che per piccoli x il primo fattore a secondo membro per una data galassia è circa costante, quindi

$$f(x) = kx.$$

Ricordiamo però che $f(x)$ deve tendere a 1 quando x è grande. Ci sono infinite scelte possibili, per esempio

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{15–10}$$

I dati sono abbastanza ben rappresentati se si prende $a_0 \simeq 10^{-10}\,\mathrm{m/s^2}$. Vediamo che cosa si ottiene per v se pensiamo a una galassia con $M = 10^{11} M_\odot = 2 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}$. A grandi distanze (piccoli x) la (15–10) dice $f(x) \simeq x$, e allora la (15–9) dà

$$\frac{GMa_0}{v^4} = 1 \quad\Rightarrow\quad v = (GMa_0)^{1/4} = 1.9 \cdot 10^5\,\mathrm{m/s}.$$

Le velocità massime che risultano dalle osservazioni sono vicine a questo valore; si noti che v è poco sensibile alla massa della galassia (va come $M^{1/4}$).

Problema 3. (Errore nella costante di Hubble):

Se si sottostima del 20% la luminosità (assoluta) di un oggetto, si sottostima la sua distanza del 10%. Infatti a parità di luminosità apparente L è proporzionale a D^2.

Nella legge di Hubble (15–5) v si ricava dal redshift, ed è indipendente dalla distanza; se si sottostima questa, si sovrastima nella stessa proporzione H. Quindi la risposta è che la costante di Hubble verrebbe sovrastimata del 10%.

Problema 4. (Distanza di un oggetto ad alto redshift):

Ovviamente per z dell'ordine di 1 o maggiore, non si può usare la legge di Hubble senza modifiche, nella forma $v = Hd$, perché questa si basa sull'approssimazione $z = v/c$, valida solo per $v \ll c$, ossia per z piccolo.

Viene quindi naturale credere che la soluzione sia di usare l'espressione del redshift Doppler relativistico:

$$\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \tag{15–11}$$

(la (15–11) discende immediatamente dalla (12–21)). Dato che per definizione di z

$$\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = 1 + z$$

risolvendo rispetto a v avremmo

$$v = c\,\frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2}$$

e quindi, usando $v = Hd$:

$$d = \frac{c}{H}\,\frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2}. \tag{15–12}$$

Col valore recente (2005) di H si ha $c/H = 4.3\,\mathrm{Gpc}$ ($1\,\mathrm{Gpc} = 10^9\,\mathrm{pc}$) e per $z = 4$ avremmo $d = 4.0\,\mathrm{Gpc}$. Si noti che usando la (15–12) $d \to c/H$ quando $z \to \infty$.

Si può obiettare però che i dati di osservazione sono z e d, non v; quindi la legge di Hubble andrebbe scritta

$$z = H'd \tag{15–13}$$

con H' costante. A piccoli z la relazione tra H e H' è

$$H' = H/c = 0.23\,\mathrm{Gpc}^{-1}.$$

Usando la (15–13) troveremmo $d = 0.92\,\mathrm{Gpc}$: che possiamo dire a questo punto? Semplicemente che nessuno dei due procedimenti seguiti è in realtà giustificato. Il primo, perché si basa sull'ipotesi che il redshift sia dovuto a un effettivo moto di allontanamento delle galassie in uno spazio-tempo piatto, dove vale la RR e quindi la formula (15–11) per l'effetto Doppler. Ma sappiamo già che lo spazio-tempo non è piatto…

Il secondo procedimento è ancor meno ammissibile, perché assume valida la (15–12) per qualunque distanza; cosa che non ha alcuna base osservativa.

Vedremo più avanti che il calcolo del redshift cosmologico a grandi distanze va fatto in tutt'altro modo: questo problema aveva soprattutto lo scopo di anticipare e preparare un tema di cui dovremo occuparci.

LEZIONE 16

I modelli cosmologici

Il discorso sui modelli cosmologici va necessariamente semplificato; non tanto per necessità didattiche, quanto perché anche a livello scientifico una trattazione accurata è possibile solo con modelli semplici. Quando si tenta d'introdurre ipotesi un po' più realistiche, i calcoli diventano subito così complicati che si comincia ad avere difficoltà a interpretarli.

Fare un modello cosmologico significa fare ipotesi sulla distribuzione di materia nell'Universo e sulla geometria dello spazio-tempo. Per affrontare il primo problema bisogna fare un salto mentale, e guardare l'Universo più o meno con lo stesso atteggiamento cui siamo abituati quando studiamo un gas. Su scala microscopica un gas consiste di atomi, che a loro volta hanno dei costituenti interni; analogamente possiamo dire che le stelle nel loro insieme si raggruppano in oggetti compatti, che sono le galassie. Le galassie sono, grosso modo, gli "atomi" dell'Universo: nel senso che sono oggetti che si muovono come un tutto unico; a volte interagiscono, ma per la maggior parte del tempo si muovono indipendentemente l'una dall'altra; e ce ne sono tantissime, forse centinaia di miliardi. Ci sono almeno 6 ordini di grandezza fra le dimensioni di una galassia tipica e quelle dell'Universo visibile.

Quanto alla geometria dello spazio-tempo, ci torneremo fra poco. Osservo solo che *le due ipotesi non sono indipendenti* nel quadro della RG, dal momento che la teoria lega appunto la geometria alla distribuzione della materia.

Il principio cosmologico

La prima semplificazione fondamentale è di assumere che la densità di galassie — e quindi la densità di materia nell'Universo — sia la stessa dappertutto. Possiamo esprimere quest'ipotesi col *principio cosmologico* (PC): le proprietà fisiche dell'Universo sono le stesse in tutti i punti dello spazio e in tutte le direzioni; brevemente, *l'Universo è omogeneo e isotropo.* In realtà l'omogeneità è necessaria per avere l'isotropia. Se assumessi infatti che non c'è omogeneità nell'Universo, cioè che in una parte dell'Universo la materia è più concentrata che in un'altra, allora guardando nella prima direzione vedrei qualcosa di diverso che guardando nella seconda.

Ci si può chiedere che motivo abbiamo per fare un'ipotesi del genere; può sembrare un po' troppo semplice, anzi un po' troppo povera. In effetti è un'ipotesi che viene continuamente rimessa in discussione, ed è una questione centrale della problematica cosmologica di oggi. Però al livello di cui ci occupiamo noi, la sola possibilità è di limitarsi a dire: questo è l'unico modello semplice che si può fare; studiamone le conseguenze. Se le sue previsioni risultassero assolutamente in disaccordo coi dati di osservazione, cercheremmo di fare un modello più sofisticato. Del resto questo è un approccio comune nella pratica scientifica: si comincia con un modello semplice; se non funziona, se ne proverà uno più complicato.

Ciò non toglie che sia lecito domandarsi da dove nasce l'idea di un modello così semplice. Di fatto ci sono delle indicazioni. Ne cito tre, che in parte abbiamo già visto, in parte riesamineremo più avanti:

– la legge di Hubble

– la distribuzione delle galassie

– l'isotropia della radiazione di fondo.

Per prima cosa, la stessa legge di Hubble (ecco perché mi sono soffermato a trattarne) parla in favore dell'omogeneità. Abbiamo visto come la legge di Hubble c'insegni che — almeno per quanto riguarda il moto delle galassie — ciò che vediamo dal nostro osservatorio O non è diverso da ciò che vedremmo in O_1 o in O_2. Questo ci autorizza a pensare che gli osservatori O, O_1 e O_2 siano nelle stesse condizioni fisiche. Naturalmente non si tratta di una prova, ma solo di un indizio; che però parla a favore di un modello omogeneo.

Quanto alla distribuzione delle galassie, ho già parlato di ammassi e superammassi; però non ci sono indicazioni di disomogeneità su scala più grande, nel senso che la struttura ad ammassi e superammassi è presente in tutto l'Universo visibile allo stesso modo.(1)

Della radiazione di fondo parleremo più diffusamente in seguito.

Il problema del tempo

Prima di procedere oltre, vorrei tornare su di una questione che avevo momentaneamente lasciato da parte. Nell'applicazione didattica è bene essere più cauti, non eccedere nell'analisi critica, altrimenti si rischia di produrre solo confusione; ma è anche bene che l'insegnante abbia una visione più approfondita, e per questa ragione mi sembra opportuno sollevare il problema che segue.

Abbiamo visto che il PC parla di omogeneità spaziale dell'Universo; tuttavia nell'enunciarlo io non ho messo in evidenza il ruolo giocato dal tempo. Il problema non esisterebbe se l'Universo fosse *stazionario*; ma abbiamo visto che la distanza delle galassie aumenta, e quindi la densità della materia presumibilmente diminuisce nel tempo. Potremo dunque dire che l'Universo è omogeneo solo se lo guardiamo in un determinato istante: se potessimo fare una fotografia dell'intero Universo, *tutto allo stesso istante*, troveremmo che la densità di materia è la stessa dappertutto. A un istante diverso la densità cambia, ma cambia dovunque nello stesso modo.

Però questo apre nuovi problemi. Che significato ha parlare di "stesso istante" per tutto l'Universo? Come si fa a mettere d'accordo orologi che stanno a distanze cosmiche uno dall'altro? Non potrebbe darsi che un discorso del genere sia addirittura privo di senso? Dobbiamo quindi chiarire che cosa intendiamo parlando di tempo per l'Universo nel suo insieme.

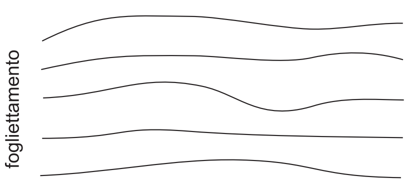


fig. 16–1

La questione è abbastanza semplice se la si guarda in modo astratto: consideriamo lo spazio-tempo (una varietà 4-dimensionale) e definiamo in esso una famiglia d'ipersuperfici di tipo spaziale (fig. 16–1). La forma di queste ipersuperfici può essere qualsiasi: occorre e basta che non s'intersechino, e che per ogni punto dello spazio-tempo ne passi una (una sola). Allora potremo parametrizzare la famiglia con una variabile reale t, e questo è il tempo di cui parliamo. Naturalmente ciò può farsi in infiniti modi, nessuno preferibile all'altro dal punto di vista matematico.

Ora possiamo riformulare il principio cosmologico in maniera più corretta, all'incirca così: è possibile "fogliettare" lo spazio-tempo (ossia definire una famiglia d'ipersuperfici spaziali come sopra) in maniera tale che se si misura la densità di materia in un punto di una determinata ipersuperficie, a un certo tempo t, si trova la stessa densità che si troverà in qualunque altro punto della stessa ipersuperficie. E per di più questo accade a ogni t. Chiameremo queste le "ipersuperfici di omogeneità."

Non basta: vogliamo anche che l'Universo appaia isotropo. È ovvio che ciò richiede che l'osservatore sia fermo rispetto alla materia vicina: se così non fosse, sarebbe facile

(1) In realtà in tempi più recenti si sono avute indicazioni secondo le quali a scala più grande l'Universo avrebbe una struttura a "bolle": grandi regioni quasi vuote, con superfici o filamenti dove si concentra la materia.

definire una direzione privilegiata, quella in cui la materia si muove. In termini geometrici, le linee orarie degli osservatori che vedono isotropo l'Universo sono ovunque ortogonali (nel senso della metrica dello spazio-tempo) alle ipersuperfici di omogeneità (fig. 16–2).

Che ciò sia possibile, ossia che esista una famiglia d'ipersuperfici di omogeneità, non è un fatto banale. Potrebbe anche accadere il contrario: se lo spazio avesse proprietà diverse nelle varie regioni, non si riuscirebbe a definire la famiglia in modo da trovare l'omogeneità.

Penso sia chiaro perché ho premesso a questa discussione che non la presentavo a scopo didattico: il livello di astrazione richiesto è certamente superiore a quello dello studente medio (e non solo medio, direi).

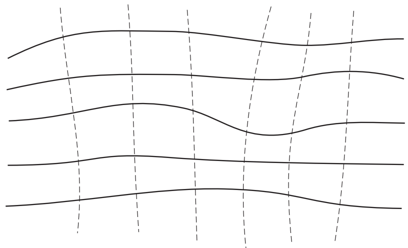


fig. 16–2

Il modello di universo a curvatura costante

L'idea fondamentale che sta alla base della cosmologia costruita sulla teoria della gravitazione di Einstein, è che le proprietà dello spazio-tempo dipendano esclusivamente dalla distribuzione della materia. Per esempio abbiamo detto che lo spazio-tempo è curvo intorno al Sole appunto perché c'è il Sole, e abbiamo visto che la curvatura dipende dalla massa del Sole. Questo presupposto va adesso combinato col PC: se si ammette che la densità di materia è la stessa dappertutto, anche la curvatura dello spazio-tempo sarà la stessa dappertutto. Quindi abbiamo un modello di universo *a curvatura costante*.

Parlando di curvatura costante bisogna però fare attenzione: si tratta di costanza nello spazio, non nel tempo. Lo spazio-tempo è quadrimensionale: se consideriamo le sezioni tridimensionali a t assegnato, il PC ci dice che queste sezioni sono a curvatura (tridimensionale) costante. Però se la misuriamo a tempi successivi, la curvatura può benissimo cambiare. Anzi, dal momento che oggi sappiamo che l'Universo si espande, è chiaro che il raggio di curvatura va aumentando nel tempo.

Questo raggio di curvatura è il parametro cosmologico fondamentale, su cui gioca tutto il nostro discorso; ed è una funzione del tempo $R(t)$. Se noi sappiamo come varia il raggio di curvatura spaziale in funzione di t, abbiamo un modello cosmologico ben determinato. Per ora lasceremo tuttavia da parte il problema di come si fa a determinare $R(t)$; supporremo di conoscere questa funzione, e vedremo che cosa possiamo ricavarne.

In cosmologia $R(t)$ si chiama spesso "parametro di scala," anziché raggio di curvatura. Ci sono per questo due buone ragioni:

- esistono geometrie per le quali il termine "raggio" è poco appropriato (quelle a curvatura *nulla* o *negativa*)
- dato che al variare di R la sezione si espande o si contrae, cambiando "scala," il termine "parametro di scala" rende adeguatamente l'effetto dell'evoluzione nel tempo.

Digressione sugli spazi a curvatura costante

Prima di procedere con la cosmologia, occorre studiare un po' meglio che cos'è uno spazio a curvatura costante. Esistono solo tre tipi di spazi (tridimensionali) a curvatura costante, tradizionalmente contraddistinti dal valore di un parametro k:

- lo spazio euclideo ($k = 0$, curvatura nulla)
- lo spazio sferico ($k = 1$, curvatura positiva)
- lo spazio iperbolico ($k = -1$, curvatura negativa).

Purtroppo uno spazio tridimensionale curvo è un'idea poco intuitiva, perché lo spazio a cui siamo abituati è euclideo. Chiunque tenti di spiegare la cosa in maniera semplice ricorre a un'analogia, che consiste nel togliere una dimensione, cioè nello studiare uno spazio a curvatura costante *bidimensionale*. L'esempio più semplice di spazio bidimensionale a curvatura costante è la superficie di una sfera, della quale abbiamo una chiara immagine.

È però molto importante non commettere un errore. Noi abbiamo esperienza della superficie di una sfera, ci è familiare; però come superficie immersa in uno spazio tridimensionale. Si sarebbe così indotti a credere che se lo spazio tridimensionale è curvo, ciò vuol dire che esiste una quarta dimensione spaziale, in cui il nostro spazio s'incurva.

Invece questo non è né vero, né necessario. È forse il caso di ricordare che circa un secolo fa la "quarta dimensione" era di moda: si pretendeva tra l'altro che servisse a spiegare i presunti fenomeni spiritici. Non mi meraviglierei se qualcosa del genere rispuntasse fuori oggi, dato il risorgere di una serie di movimenti verso l'occulto: anche la televisione dà non poco spazio a idee del genere. Mettiamo insieme questa moda con certa pseudodivulgazione, che parla disinvoltamente di quarta dimensione nella cosmologia, e la frittata è fatta.

L'accenno che ho fatto alla quarta dimensione non va neppure confuso coll'idea del tempo come quarta dimensione dello spazio-tempo. Il mio discorso è: come la superficie di una sfera è una superficie bidimensionale immersa in uno spazio tridimensionale, così si può credere che per poter parlare di uno spazio curvo tridimensionale occorra aggiungere una quarta dimensione *spaziale* (e se si conta anche il tempo, si arriverebbe a cinque). In realtà si può benissimo concepire uno spazio tridimensionale curvo senza bisogno d'immergerlo in nient'altro: solo che si tratta di cosa lontana dalla nostra esperienza comune.

Le coordinate comoventi

Ragioniamo dunque sulla sfera: la superficie di una sfera S^2 sarà il nostro modello dell'Universo. Poiché l'Universo è in espansione, il raggio della sfera cresce al passare del tempo: e noi dobbiamo immaginare di vivere sopra questa sfera che cresce. La cosa che ora c'interessa di più è farci un'idea di come viaggia la luce in un universo così fatto.

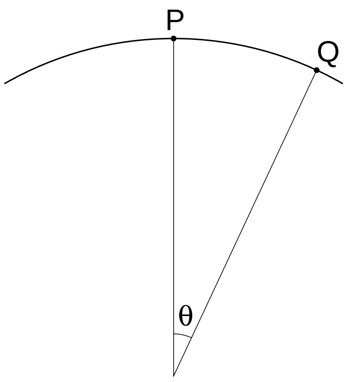


fig. 16–3

Cerchiamo prima di tutto di caratterizzare i punti di questa superficie con un sistema di coordinate. Dato che si tratta di una superficie sferica, le coordinate più naturali sono quelle polari. Scelto un polo P, avremo le coordinate ϑ e φ. L'angolo ϑ posso disegnarlo facilmente, mentre φ è meglio immaginarlo (fig. 16–3).

Se invece della sfera avessimo lo spazio sferico tridimensionale S^3, ci vorrebbe una terza coordinata polare χ. Questa è una cosa che suona un po' strana: nello spazio euclideo ci sono due angoli come coordinate polari, ma la terza è il raggio; invece in uno spazio sferico tridimensionale le tre coordinate polari sono tre angoli. Anche per evitare questa complicazione, conviene limitarsi alla superficie bidimensionale.

Il punto P della figura potremmo essere noi, mentre Q è un'altra galassia: Q è caratterizzato dagli angoli ϑ, φ. Il fatto che l'Universo si espande non fa cambiare le coordinate: se il raggio della sfera cresce, le coordinate ϑ e φ rimangono le stesse (ecco il vantaggio di aver usato degli angoli!) Dunque le coordinate polari di un determinato punto del "fluido cosmologico" (come si dice di solito), cioè di una determinata galassia, sono costanti. Possiamo dare ad es. la latitudine e la longitudine della galassia di Andromeda, la latitudine e la longitudine di una certa galassia dell'ammasso della Vergine, ecc. Ogni galassia è individuata dalle sue coordinate polari, che nel nostro modello sono due, e sono costanti, nonostante l'espansione. Per questo motivo le coordinate ϑ, φ (e anche la χ, se vogliamo ragionare in tre dimensioni) si chiamano *coordinate comoventi*.

Nota: La distanza da P a Q è un'altra cosa. Poiché noi viviamo sulla sfera, quando parliamo di distanza dobbiamo intendere l'arco di cerchio massimo — cioè di geodetica — sulla superficie della sfera. La distanza sarà naturalmente $R\vartheta$. Abbiamo detto che ϑ non cambia, però R cambia: quindi la distanza cambia, cresce nel tempo. Ne riparleremo tra poco.

Conviene riassumere qui alcune proprietà di S^3, che in parte sono uguali o analoghe a quelle di S^2, ma con qualcosa in più. S^3 è uno spazio *finito*, in diversi sensi:

- Se si procede in linea retta (geodetica) si torna al punto di partenza dopo aver percorso un tratto lungo $2\pi R$.
- Il volume totale vale $2\pi^2 R^3$.
- I punti che distano a da P stanno su una sfera S^2 di area $4\pi R^2 \sin^2(a/R)$, che si annulla per $a = \pi R$ (antipodo). (Si veda il problema 1.)

Prima di andare avanti, occorre rispondere a una domanda: come si fa a sapere se davvero lo spazio è curvo? Il discorso non è nuovo. Sappiamo che un modo di accorgersi che lo spazio è curvo è di tracciare una circonferenza e misurare quant'è lunga: se si scopre che non è 2π volte il raggio, ciò sta a dimostrare che lo spazio non è euclideo. Non solo: dalla misura, e dalla formula che abbiamo visto in precedenza, si può ricavare R.

Non si tratta naturalmente di un metodo pratico: come si fa a disporre tutti questi punti alla stessa distanza, e poi a misurare quant'è lunga la circonferenza? Per questo abbiamo discusso anche altri sistemi. Tuttavia il metodo è utile in linea di principio, perché aiuta a capire come si può determinare il raggio di curvatura.

Anche se non ci servirà in seguito, siamo al punto giusto per fare un'osservazione: non potrebbe la circonferenza risultare più lunga di $2\pi r$, anziché più corta? Questo è impossibile sulla sfera, ma esistono superfici a curvatura costante in cui ciò accade; e allo stesso modo esistono spazi tridimensionali a curvatura costante di questo tipo (sono gli spazi iperbolici di cui ho già parlato). Anche per i modelli cosmologici una tale possibilità non è esclusa, ed è connessa col problema se l'Universo sia finito o infinito, chiuso o aperto. Tuttavia non possiamo permetterci di affrontare anche questo argomento: perciò in tutto quanto segue, a parte accenni occasionali, ci limiteremo al modello a curvatura positiva.(1)

Cinematica e dinamica cosmologica

Abbiamo visto che tutto quanto occorre per caratterizzare la geometria dello spazio-tempo è la funzione $R(t)$: il suo andamento col tempo ci dice se l'Universo si espande, se l'espansione accelera o rallenta, ecc. Vedremo fra poco che in realtà la conoscenza di $R(t)$ permette di calcolare altri effetti osservabili: la parte della cosmologia che connette $R(t)$ con gli effetti osservabili si chiama talora "cinematica cosmologica."

C'è poi un altro problema: da che cosa dipende l'andamento di $R(t)$? Sappiamo, sia pure vagamente per ora, che deve entrarci la distribuzione della materia, attraverso le famose equazioni di Einstein. Studiare queste equazioni, collegare i dati disponibili sulla materia con quelli relativi a R: questa è la "dinamica cosmologica," della quale diremo qualcosa in seguito. Per ora limitiamoci alla cinematica, studiando come l'andamento del parametro di scala nel tempo influisce sulla propagazione della luce.

(1) I dati degli ultimi anni riescono compatibili col caso euclideo ($k = 0$). Ci sono però diverse ragioni per non abbandonare la discussione del modello sferico: una è che capire un modello euclideo in espansione non è più semplice (per quanto possa apparire strano); poi c'è il vantaggio che il modello sferico si appoggia alla geometria familiare della sfera; infine un modello sferico con R molto grande non differisce apprezzabilmente da un modello euclideo (e del resto, i dati di osservazione sono sempre affetti da incertezze).

Il redshift cosmologico

I messaggi che noi possiamo ricevere dal resto dell'Universo sono quasi esclusivamente luce, oppure onde elettromagnetiche di altre lunghezze d'onda: quindi capire come si propaga la luce in un universo a curvatura costante in espansione è decisivo. Più in particolare, a noi interessa risolvere il seguente problema, chiaramente connesso col redshift cosmologico di cui abbiamo parlato: se una sorgente lontana emette luce di una certa lunghezza d'onda, che noi riceviamo dopo un certo tempo, con quale lunghezza d'onda la riceviamo?

Sebbene possa sembrare un problema complicato, in realtà la soluzione è semplice, se si ragiona al modo giusto (succede spesso ...). Consideriamo due stazioni, una E che emette la luce, e una R che la riceve (fig. 16–4); la luce viaggia da E a R. In figura è rappresentata a sinistra la situazione all'istante di emissione, a destra quella all'istante di arrivo. L'unica differenza è che il raggio dell'Universo è cambiato nel frattempo.

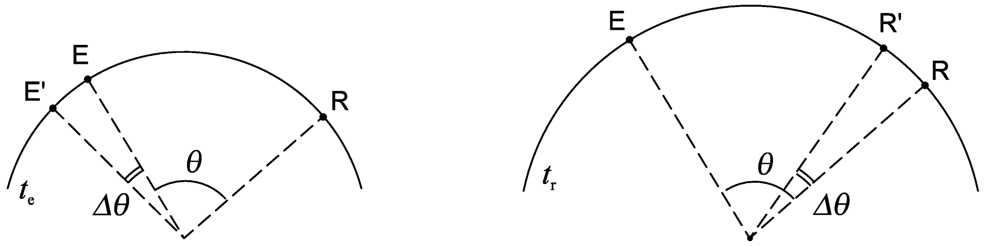


fig. 16–4

Attenzione: non bisogna farsi confondere dalla figura, dove sembra che la luce segua una linea curva sulla sfera: questo contraddice forse il fatto che la luce viaggia in linea retta? Il punto è che *la superficie della sfera è tutto il nostro universo*: quindi la "linea retta" diviene l'arco di cerchio massimo sulla superficie della sfera, cioè la geodetica. Il vero problema è che mentre la luce cammina, l'Universo gli si espande sotto, per così dire. La luce impiega un certo tempo ad andare da E a R: se è partita a un istante t_e, a cui il raggio dell'Universo era R_e, quando arriva in R, all'istante t_r, il raggio sarà diventato $R_\mathrm{r} > R_\mathrm{e}$. Come si fa allora a sapere quanto tempo impiega la luce, e che cosa succede nella propagazione?

Quello che segue è il ragionamento che si trova in tutti i libri di cosmologia, e che viene di solito fatto con una matematica piuttosto sofisticata; tuttavia è possibile presentarlo in termini del tutto elementari, e senza nessuna alterazione nella sostanza fisica del discorso. Chiamiamo ϑ l'angolo al centro corrispondente all'arco ER (ricordate: ϑ è una coordinata comovente). La distanza fra E ed R all'istante t_e sarà $R_\mathrm{e}\vartheta$, mentre la distanza all'istante t_r sarà invece $R_\mathrm{r}\vartheta$, che è maggiore.

Prendiamo ora accanto a E, ma dalla parte opposta a R, un altro punto, separato da E di un piccolo angolo $\Delta\vartheta$, e chiamiamolo E$'$; prendiamo poi un altro punto prima di R — chiamiamolo R$'$— anch'esso separato da R di $\Delta\vartheta$. Supponiamo che le due sorgenti in E e in E$'$ facciano entrambe partire due lampi di luce allo stesso istante t_e: è chiaro che quando il lampo emesso da E arriva in R, quello emesso da E$'$ arriva in R$'$. Infatti anche se l'Universo si va espandendo, la propagazione della luce tra E$'$ ed R$'$ segue le stesse modalità di quella tra E ed R, perché lo spazio è a curvatura costante.

Ma il lampo emesso da E$'$ deve passare per E: ci arriverà a un istante che chiamo $t_\mathrm{e} + \Delta t_\mathrm{e}$. Dopo essere arrivato in R$'$, arriverà anche in R, a un istante $t_\mathrm{r} + \Delta t_\mathrm{r}$. Se l'angolo $\Delta\vartheta$ è piccolo, anche Δt_e e Δt_r sono piccoli; e si potrà scrivere

$$\Delta t_\mathrm{e} = R_\mathrm{e}\,\Delta\vartheta/c \qquad \Delta t_\mathrm{r} = R_\mathrm{r}\,\Delta\vartheta/c$$

perché nel tempo Δt_e il raggio non cambia apprezzabilmente, e lo stesso nel tempo Δt_r. Abbiamo anche tenuto presente che la luce si sta propagando nel vuoto, e abbiamo continuato ad assumere come fatto fondamentale che — anche in uno spazio curvo, in presenza della gravità, ecc. — la luce viaggia sempre alla velocità c in un rif. localmente inerziale (PE).

A questo punto possiamo dimenticare E′ ed R′, che sono serviti solo come espediente per arrivare al risultato. In pratica abbiamo questa situazione: un lampo di luce parte da E all'istante t_e e arriva in R all'istante t_r; poco dopo da E parte un altro lampo — all'istante $t_\mathrm{e} + \Delta t_\mathrm{e}$ — che arriva in R all'istante $t_\mathrm{r} + \Delta t_\mathrm{r}$. Abbiamo visto che Δt_r non è uguale a Δt_e: se fate partire dalla galassia E due lampi, intervallati di un secondo, quando arrivano alla galassia R il loro intervallo non è più di un secondo. Sarà maggiore, perché $R_\mathrm{r} > R_\mathrm{e}$, ossia perché l'Universo si espande.

È importante a questo punto ricordare il significato delle nostre t: si tratta in ogni punto (in ogni galassia) del tempo *proprio* segnato da un orologio locale; tutti gli orologi sono sincronizzati, come abbiamo visto, grazie al PC.

Credo che ormai sia chiaro dove andiamo a parare. Se invece di due lampi di luce abbiamo un'unica sorgente monocromatica, allora quei Δt_e e Δt_r li possiamo interpretare come i periodi della radiazione alla trasmissione e alla ricezione. Ma i periodi sono proporzionali alle lunghezze d'onda: abbiamo così trovato che *la lunghezza d'onda ricevuta sta alla lunghezza d'onda emessa come il raggio dell'Universo all'istante di arrivo sta al raggio all'istante di partenza*:

$$\frac{\lambda_\mathrm{r}}{\lambda_\mathrm{e}} = \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}}\,. \tag{16–1}$$

Redshift ed espansione

Se colleghiamo questa relazione alla definizione (15–5) del parametro di redshift, troviamo

$$1 + z = \frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}}\,. \tag{16–2}$$

Abbiamo così ottenuta un'interpretazione del redshift molto più profonda che non l'effetto Doppler: l'osservazione del redshift cosmologico è la prova che il raggio dell'Universo è cresciuto dal momento in cui la luce è stata emessa al momento in cui la riceviamo. Così un redshift di 0.3 (del 30%) significa che il raggio dell'Universo è aumentato del 30% nel tempo che la luce ha impiegato ad arrivare fino a noi.

Notate che nel nostro ragionamento, e quindi nella formula (16–2), non c'è affatto l'ipotesi che z debba essere piccolo. Se noi conosciamo una sorgente per la quale $z = 4$, questo ci dice che il rapporto tra il raggio dell'Universo oggi e il raggio quando la luce è stata emessa da quella sorgente è $1 + 4$, cioè 5. Quando la luce è partita, il raggio di curvatura dell'Universo era 5 volte più piccolo dell'attuale.

Viceversa non possiamo dir niente del tempo al quale la luce è stata emessa, a meno che non conosciamo la funzione $R(t)$. Se per esempio accadesse che $R \propto t^{2/3}$ e quindi $t \propto R^{3/2}$ potremmo dire che $t_\mathrm{r}/t_\mathrm{e} = 5^{3/2} \simeq 11$.

Un'osservazione conclusiva: abbiamo mostrato che non è indispensabile ricorrere all'effetto Doppler per spiegare il redshift cosmologico; inoltre la strada che abbiamo seguita è più immediata, e a mio parere è molto più istruttiva, per la diretta connessione che ha con la geometria dello spazio-tempo e con la sua evoluzione temporale.

La legge di Hubble come approssimazione

Il passo successivo è di capire come la legge di Hubble sia una conseguenza *approssimata* della relazione (16–2). Supponiamo che le galassie che stiamo osservando siano abbastanza vicine. "Vicine" va inteso naturalmente su scala cosmologica: una distanza piccola rispetto al raggio dell'Universo. Non è quindi necessario limitarsi a pochi milioni di anni luce: anche centinaia di milioni vanno ancora bene.

Per le galassie vicine z è piccolo: infatti nel tempo che la luce impiega ad arrivare, il raggio dell'Universo cambia di poco. Per calcolare $t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e}$ possiamo addirittura supporre il raggio costante: allora potremo scrivere

$$t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e} = \frac{d}{c}\,.$$

Infatti, se la distanza d nel frattempo non è cambiata, basta dividerla per la velocità della luce. Inoltre possiamo porre, approssimativamente:

$$R_\mathrm{r} = R_\mathrm{e} + \frac{dR}{dt}\,(t_\mathrm{r} - t_\mathrm{e}) = R_\mathrm{e} + \dot{R}\,\frac{d}{c}\,.$$

Dividendo per R_e:

$$\frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} - 1 = \frac{\dot{R}}{R}\,\frac{d}{c}$$

(siccome R_e e R_r sono poco diversi, a secondo membro scrivo R, senza stare a distinguere tra raggio all'emissione e raggio alla ricezione). Ma dalla (16–2)

$$\frac{R_\mathrm{r}}{R_\mathrm{e}} - 1 = z$$

e quindi abbiamo:

$$z = \frac{\dot{R}}{c\,R}\,d$$

cioè la legge di Hubble, dove il coefficiente di proporzionalità, ossia la costante di Hubble, è

$$H = \frac{\dot{R}}{R} \tag{16–3}$$

(ricordate che $z = v/c$ e $v = Hd$).

Riassumendo: abbiamo fatto un modello di universo a curvatura costante, supponendo poi che il raggio di curvatura vari nel tempo; ma non abbiamo fatto alcuna ipotesi sulla funzione $R(t)$. Abbiamo trovato che per piccole distanze deve valere la legge di Hubble, cioè che il redshift è proporzionale alla distanza, e che la costante di Hubble è legata alla legge di espansione dalla formula (16–3).

Significato cosmologico di H; il problema dell'estrapolazione

A questo punto, mettendo nella formula il valore osservato di H, se ne ricava il valore di $\dot{R}/R$. Si ha così un'interpretazione cinematica di H: è il rapporto tra la velocità di espansione dell'Universo e il raggio in quel momento. Supponiamo ora — non è affatto vero, ci serve solo per orientamento — che la velocità di espansione sia costante: allora $R/\dot{R}$ (detto "tempo di Hubble" t_H) è il tempo trascorso dall'istante in cui il raggio era nullo. Poiché t_H è l'inverso di H, vale $15 \cdot 10^9$ anni: quindi nell'ipotesi che la velocità di espansione rimanga costante, scopriamo che 15 miliardi di anni fa l'Universo aveva raggio nullo. Però non bisogna farsi impressionare da questo risultato, perché è basato su di un'ipotesi sicuramente non vera.

Possiamo dare un'interpretazione grafica del nostro ragionamento. Disegniamo un ipotetico grafico della funzione $R(t)$ (di cui per ora non sappiamo niente) (fig. 16–5, curva a tratto intero). All'istante attuale t_0 abbiamo un raggio R_0: se tiriamo la tangente alla curva in questo punto, il segmento $t_1 t_0$ sull'asse dei tempi (quello che una volta veniva chiamata "sottotangente" della curva) è lungo t_H: all'ingrosso 15 miliardi di anni.

Naturalmente questo non vuol dire molto, perché la curva, anziché come l'ho disegnata, potrebbe essere fatta diversamente, per es. come quella tratteggiata. Il punto d'intersezione della tangente con l'asse dei tempi non ha, per ora, nessun particolare significato: la curva $R(t)$ potrebbe intersecare l'asse in un punto qualunque, o anche non intersecarlo affatto. Occorrerebbe sapere qualcosa di più sulla $R(t)$.

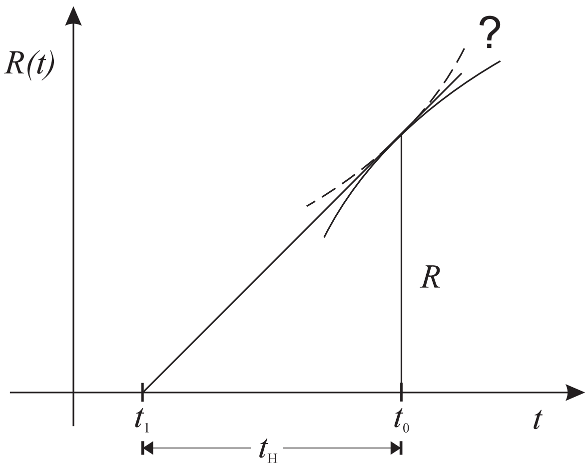


fig. 16–5

Torniamo un momento sul fatto che la legge di Hubble è solo approssimata, e cerchiamo di spingere oltre questa approssimazione: potremmo cercare di migliorarla facendo uno sviluppo al secondo ordine. Anche senza fare il calcolo esplicito, è chiaro che per distanze abbastanza grandi il parametro di redshift non sarà più rigorosamente proporzionale alla distanza. Il suo andamento esatto dipenderà da quello della funzione $R(t)$: non conterà più solo la tangente, ma anche la curvatura del grafico. Se quindi noi potessimo fare misure di redshift a grandi distanze, ne ricaveremmo ulteriori informazioni su com'è fatto il grafico: per esempio se è concavo o convesso. Sapere se è concavo o convesso è molto importante, perché se avessimo delle buone ragioni per dire che è sempre concavo verso il basso, allora avremmo un'intersezione con l'asse dei tempi — cioè un raggio nullo — a un istante più vicino a noi di t_H. Purtroppo già il valore della costante di Hubble è incerto; a maggior ragione è difficile studiare le deviazioni dalla legge di Hubble a grandi distanze.

Due obiezioni

Quando si parla di espansione e redshift, è frequente sentirsi fare due obiezioni. La prima è questa: se tutte le distanze si espandono, la stessa cosa succede agli strumenti di misura; allora com'è possibile rivelare l'espansione?

In effetti, se noi avessimo un Universo riempito di materia formata di particelle puntiformi, slegate le une dalle altre, l'obiezione sarebbe giusta: tutte le particelle si allontanerebbero nella stessa proporzione, e mancherebbe qualsiasi termine di confronto per accorgersi dell'espansione. Ma il mondo non è fatto così.

Già le galassie non si espandono: le stelle che le compongono risentono del campo gravitazionale (ossia della modifica alla geometria dello spazio-tempo) prodotta dalla massa della galassia, che localmente ha una densità molto maggiore di quella media dell'Universo. Allo stesso modo i pianeti del sistema solare si muovono nel campo del Sole, e il fatto che il sistema sia immerso in una geometria in lenta espansione non ha effetto sulle loro orbite.

Ma se poi scendiamo di scala, per arrivare alla Terra, o alla materia che costituisce un metro campione, entrano in gioco altre interazioni: le dimensioni della Terra o le distanze fra gli atomi del metro sono determinate dalle interazioni elettriche fra le cariche atomiche, che sono enormemente più grandi degli effetti gravitazionali. Quindi né la Terra né il metro si accorgono se l'Universo si espande o no.

Una seconda obiezione concerne invece la velocità dell'espansione. Se la funzione $R(t)$ è del tipo di quelle che ho accennato nel corso della lezione o nel problema n. 4, ossia se R cresce come una potenza di t con esponente minore di 1, è chiaro che $\dot{R} \to \infty$ quando $t \to 0$. Anche la distanza fra due punti A e B qualsiasi del fluido cosmologico, che vale $R\vartheta$, si comporta allo stesso modo: la sua derivata va a infinito per $t \to 0$. Ma questo non è in contrasto con l'esistenza di una velocità limite?

Per rispondere, occorre ricordare il significato dei rif. localmente inerziali e del PE. In un rif. localmente inerziale vale la RR, che prevede appunto una velocità limite; ma sappiamo che quello di rif. localmente inerziale è anch'esso un concetto limite, nel senso che ha validità approssimata, tanto migliore quanto più piccola è la regione di spazio e di tempo che si considera. Invece il calcolo di una velocità maggiore di c indicato sopra fa uso di due corpi a distanza *finita*, e richiede di spingersi a condizioni in cui la curvatura dello spazio-tempo non può essere trascurata.

Insomma: non esiste un rif. inerziale *esterno*, rispetto al quale studiare il moto di A e di B. Chi propone l'obiezione in realtà non ha abbandonato l'idea che sussista, nascosto per così dire dietro lo spazio-tempo di cui abbiamo ragionato in questa lezione, il buon vecchio spazio euclideo, così tranquillizzante…

Problemi

1. Dimostrare la formula per l'area della sfera di "raggio" a in una S^3.

2. Lo spazio iperbolico può essere definito come la sottovarietà di $\mathbb{R}^4$ di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = w^2$ $(w > 0)$, la distanza essendo definita in $\mathbb{R}^4$ da

$$s^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - (w_1 - w_2)^2. \qquad (16\text{–}4)$$

Studiare le proprietà di questo spazio. In particolare:

a) lo spazio è finito o infinito?

b) che relazione c'è fra "raggio" e area di una sfera?

(Suggerimento: molto può essere capito limitandosi al piano $y = z = 0$.)

3. Si consideri un ipotetico universo in cui $R = a\sqrt{t}$.

a) Quale sarà la relazione redshift-distanza?

b) Calcolare la costante di Hubble H e il tempo di Hubble t_{H}.

(Suggerimento: usare $c\,dt = ds = R\,d\vartheta$ per ricavare ϑ.)

4. Nell'universo del problema precedente è stato osservato un oggetto con $z = 4$. Assumendo $H = 70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$ calcolare:

a) la distanza attuale dell'oggetto

b) la variazione di tale distanza nel tempo

c) la distanza all'istante di emissione $t = t_{\mathrm{e}}$

d) la variazione nel tempo di tale distanza.

Risposte

Problema 1. (Area della sfera in S^3):

Il modo più semplice di risolvere il problema è di considerare S^3 come una sottovarietà di $\mathbb{R}^4$, di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2.$$

In S^3 si possono allora definire coordinate polari χ, ϑ, φ, con le relazioni

$$\begin{aligned} x &= R\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= R\,\sin\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= R\,\sin\chi\,\cos\vartheta \\ w &= R\,\cos\chi \end{aligned} \qquad (16\text{–}5)$$

Una sfera S^2 con centro O in $\chi = 0$ è definita fissando un valore di χ e lasciando libere le coordinate ϑ, φ: il suo raggio (in $\mathbb{R}^4$) è $R\,\sin\chi$ e l'area sarà perciò

$$A = 4\pi R^2 \sin^2\chi. \tag{16–6}$$

Il raggio a non è che la distanza dal centro O a un punto P della sfera, per es. quello con $\vartheta = \varphi = 0$. La distanza va però calcolata su S^3: più esattamente sull'arco di geodetica che unisce O con P. I punti di questa geodetica hanno tutti $\vartheta = \varphi = 0$ (per simmetria); quindi le (16–5) forniscono

$$dx = dy = 0 \qquad dz = R\,\cos\chi\,d\chi \qquad dw = R\,\sin\chi\,d\chi.$$

Ne segue

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 = R^2\,d\chi^2 \quad\Rightarrow\quad ds = R\,d\chi$$

e quindi $a = R\chi$.

Basta ora sostituire $\chi = a/R$ nell'espressione (16–6) dell'area, per arrivare al risultato voluto:

$$A = 4\pi R^2 \sin^2(a/R).$$

Problema 2. (Lo spazio iperbolico):

a) Seguiamo il suggerimento, ossia consideriamo la sezione $y = z = 0$ di $\mathbb{R}^4$, che ci fornirà una sezione *unidimensionale* dello spazio che dobbiamo studiare. Allora

$$x^2 + R^2 = w^2. \tag{16–7}$$

La (16–7) è un'iperbole equilatera nel piano (x, w); la condizione $w > 0$ ci restringe al ramo superiore. Gli asintoti sono le bisettrici degli assi.

La formula (16–4) della distanza, scritta in forma differenziale, è

$$ds^2 = dx^2 - dw^2 \tag{16–8}$$

(le altre due coordinate sono costanti).

La distanza dal punto $O(0, R)$ a un punto $P(x, w)$ si può calcolare come segue. Differenziando la (16–7) ed eliminando dw nella (16–8) troviamo

$$ds = \frac{R}{w}\,dx = \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 + x^2}}. \tag{16–9}$$

Integrando:

$$s = \int_0^x \frac{R\,dx'}{\sqrt{R^2 + x'^2}} = R\,\ln\!\left(\frac{x}{R} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2}}\right).$$

In realtà i calcoli si semplificano molto introducendo al posto di x la coordinata χ tale che $x = R\,\sinh\chi$. Infatti ne segue $w = R\,\cosh\chi$ e sostituendo in (16–9) si vede che $ds = R\,d\chi$; quindi la distanza cercata è proprio $s = R\,\chi$.

Quando $x \to \infty$ anche $\chi \to \infty$, il che basta a dimostrare che lo spazio è infinito nel senso delle distanze.

b) Da quanto abbiamo trovato finora, segue in modo naturale l'idea d'introdurre, al posto di x, y, z, w, delle coordinate polari al modo seguente:

$$\begin{aligned} x &= R\,\sinh\chi\,\sin\vartheta\,\cos\varphi \\ y &= R\,\sinh\chi\,\sin\vartheta\,\sin\varphi \\ z &= R\,\sinh\chi\,\cos\vartheta \\ w &= R\,\cosh\chi. \end{aligned} \tag{16–9}$$

Si verifica subito che $x^2+y^2+z^2+R^2=w^2$ e ovviamente $w>0$. Già sappiamo che $R\,\chi$ è il raggio della sfera S^2 di centro O, e le (16–9) mostrano che l'area vale

$$A = 4\pi R^2\sinh^2\chi.$$

Problema 3. (Relazione redshift-distanza):
a) Secondo il suggerimento:

$$c\,dt = ds = R\,d\vartheta = a\sqrt{t}\,d\vartheta.$$

Separando le variabili e integrando si trova

$$\vartheta = \frac{2c}{a}\left(\sqrt{t_\mathrm{r}}-\sqrt{t_\mathrm{e}}\right) = \frac{2c}{a^2}\,(R_\mathrm{r}-R_\mathrm{e}). \tag{16–10}$$

La distanza l_r alla ricezione è

$$\begin{aligned} l_\mathrm{r} = R_\mathrm{r}\vartheta &= \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}(R_\mathrm{r}-R_\mathrm{e}) = \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2\left(1-\frac{R_\mathrm{e}}{R_\mathrm{r}}\right) \\ &= \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2\left(1-\frac{1}{1+z}\right) = \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2\,\frac{z}{1+z} = D\,\frac{z}{1+z}. \end{aligned} \tag{16–11}$$

dove

$$D = \frac{2c}{a^2}\,R_\mathrm{r}^2 = 2c\,t_\mathrm{r}.$$

Da qui si ricava

$$z = \frac{l_\mathrm{r}}{D-l_\mathrm{r}}. \tag{16–12}$$

Si vede che $z\to\infty$ per $l_\mathrm{r}\to D$, ossia la distanza D definisce un *orizzonte*. Questo appare anche dalla (16–10): per $R_\mathrm{e}=0$, ϑ assume il valore finito D/R_r.

Si può obiettare che l'orizzonte non esiste se $D/R_\mathrm{r}>\pi$, dato che $\vartheta=\pi$ all'antipodo. Questo è vero; però sostituendo l'espressione di D si vede che in realtà l'orizzonte esiste se $R_\mathrm{r}<\pi a^2/2c$, cioè quando il raggio dell'Universo è abbastanza piccolo.

Il risultato è molto interessante, anche perché si riproduce con qualsiasi modello realistico di Universo, in cui R cresce sempre come una potenza di t con esponente minore di 1. Ne segue che nelle prime fasi dell'espansione regioni distanti dell'Universo non si possono vedere, quindi non possono interagire: come mai allora la radiazione di fondo è isotropa? È questo uno dei motivi che hanno portato a proporre i "modelli inflazionari," in cui si postula la presenza di un qualche campo con proprietà (densità, pressione) diverse dalla materia ordinaria, sì che l'espansione iniziale segue una legge diversa.

b) La legge di Hubble si ricava dalla(16–12), per $l_\mathrm{r} \ll D$:

$$z \simeq \frac{l_\mathrm{r}}{D} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{c}{D} = \frac{1}{2\,t_\mathrm{r}}. \tag{16–13}$$

Da qui anche il tempo di Hubble:

$$t_\mathrm{H} = 2\,t_\mathrm{r}.$$

Siamo dunque nel caso $t_\mathrm{r} < t_\mathrm{H}$: proprio quello accennato nella fig. 16–5.

Problema 4. (Distanza e velocità di un oggetto con alto redshift):
a) Conviene anzitutto calcolare D definito dalla relazione con H (16–13):

$$D = \frac{c}{H} = 4.3\,\mathrm{Gpc}.$$

Poi dalla (16–11) si ha $l_\mathrm{r} = 3.4\,\mathrm{Gpc}$.

b) È ovvio che si deve calcolare la derivata di l_r rispetto a t_r; il punto delicato è: che cosa va tenuto costante quando si deriva? La sola grandezza che resta costante durante l'espansione è la coordinata comovente ϑ della sorgente: partiamo dunque da $l_\mathrm{r} = R_\mathrm{r}\,\vartheta$ e deriviamo, ricordando anche che $R = a\,\sqrt{t}$:

$$\frac{dl_\mathrm{r}}{dt_\mathrm{r}} = \frac{dR_\mathrm{r}}{dt_\mathrm{r}}\,\vartheta = \frac{a}{2\sqrt{t_\mathrm{r}}}\,\vartheta = \frac{a}{2\sqrt{t_\mathrm{r}}}\,\frac{l_\mathrm{r}}{a\,\sqrt{t_\mathrm{r}}} = \frac{l_\mathrm{r}}{2t_\mathrm{r}} = H\,l_\mathrm{r}.$$

Mettendo i numeri:

$$\frac{dl_\mathrm{r}}{dt_\mathrm{r}} = 2.4 \cdot 10^5\,\mathrm{km/s}.$$

c) La distanza all'emissione si calcola facilmente, dato che tutte le distanze variano come R. Quindi

$$l_\mathrm{e} = l_\mathrm{r}\,\frac{R_\mathrm{e}}{R_\mathrm{r}} = \frac{l_\mathrm{r}}{1+z} = 0.68\,\mathrm{Gpc}.$$

d) Il calcolo si fa come in b):

$$\frac{dl_\mathrm{e}}{dt_\mathrm{e}} = \frac{l_\mathrm{e}}{2t_\mathrm{e}}.$$

Sappiamo già che $l_\mathrm{e} = l_\mathrm{r}/(1+z)$; quanto a t_e:

$$t_\mathrm{e} = \frac{R_\mathrm{e}^2}{a^2} = \frac{R_\mathrm{r}^2}{a^2(1+z)^2} = \frac{t_\mathrm{r}}{(1+z)^2}$$

e perciò

$$\frac{dl_\mathrm{e}}{dt_\mathrm{e}} = \frac{l_\mathrm{r}}{2t_\mathrm{r}}\,(1+z) = H\,l_\mathrm{r}\,(1+z).$$

Il risultato numerico è $1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{km/s}$, ossia $4c$, e questo era lo scopo della domanda!

Non c'è niente di paradossale nell'aver trovato un valore superiore a c, perché $dl_\mathrm{e}/dt_\mathrm{e}$ *non può essere interpretata come velocità della sorgente rispetto al ricevitore.* Infatti questa interpretazione richiederebbe di poter definire un RI che si estenda spazialmente in modo da includere i due oggetti, e ciò è precluso dalla curvatura dello spazio-tempo.

LEZIONE 17

La dinamica cosmologica

Abbiamo visto come sia possibile, senza tanta matematica, trattare le conseguenze della variazione nel tempo del raggio dell'Universo, e in particolare prevedere il redshift cosmologico e ricavare la legge di Hubble. Questa era ciò che abbiamo chiamato cinematica cosmologica. Vogliamo ora affrontare la dinamica: qual è la legge di variazione di $R(t)$? Come trovare un'equazione del moto? Nelle condizioni particolarmente semplici del nostro modello, ciò è possibile (barando un po') anche senza scrivere le equazioni di Einstein. La ragione è che per regioni abbastanza piccole, e per materia in quiete o in moto lento, la teoria newtoniana costituisce un'approssimazione adeguata.

Immaginiamo perciò d'isolare nel nostro spazio una piccola sfera (s'intende piccola alla scala cosmologica) e di studiarne il moto. Abbiamo già visto che per il PC possiamo supporre costante la densità ϱ della materia; per di più possiamo anche supporre che tale materia sia in quiete, perché le osservazioni mostrano che le velocità relative delle galassie rispetto a quelle vicine sono sempre piccole rispetto a c. In queste ipotesi vale la fisica newtoniana, e una galassia al bordo della nostra sfera (fig. 17–1) si muove sotto la sola azione della forza di gravità prodotta dalla massa interna alla sfera (teorema di Gauss).

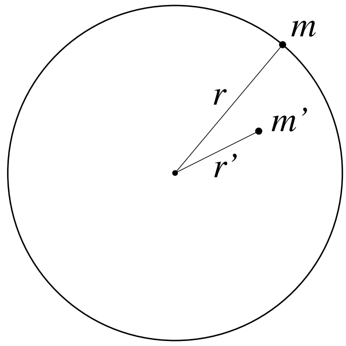


fig. 17–1

Se M è la massa totale nella sfera, e r il suo raggio, l'accelerazione della galassia al bordo si calcola da

$$m\,\ddot{r} = -\frac{GMm}{r^2}. \qquad (17\text{–}1)$$

La m si cancella, e risulta

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Ma la massa totale è

$$M = \tfrac{4}{3}\pi\, r^3 \varrho$$

quindi

$$\ddot{r} = -\tfrac{4}{3}\pi G\, r\, \varrho. \qquad (17\text{–}2)$$

Bisogna però stare attenti, perché così abbiamo fatto le cose troppo semplici. Abbiamo supposto che la densità sia costante nella sfera: allora dobbiamo assicurarci che resti costante a tutti i tempi, altrimenti la formula che lega la massa alla densità non è più vera. Per sapere se la densità resta costante dobbiamo studiare il moto di un'altra masserella m', la cui distanza dal centro sia $r' < r$. Per fortuna va tutto bene, perché su m' agisce soltanto la forza della materia che sta all'interno del raggio r'; quindi l'accelerazione di m' è data ancora dalla (17–2), se al posto di r si mette r':

$$\ddot{r}' = -\tfrac{4}{3}\pi G\, r'\, \varrho.$$

Se allora scegliamo bene le condizioni iniziali, in modo che inizialmente la velocità di ciascuna masserella sia proporzionale a r, per ragioni di similitudine tutti i punti continueranno a muoversi istante per istante con velocità proporzionale a r: infatti anche l'accelerazione è proporzionale a r. Ne segue che l'intera sfera si espande o si contrae, ma sempre mantenendo inalterati i rapporti delle distanze tra i vari punti: quindi la densità resta uniforme.

Accanto alla (17–1) possiamo anche scrivere la conservazione dell'energia:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}m\,\dot{r}^2 - \frac{GMm}{r} &= \text{cost.}\\ \dot{r}^2 - \frac{2GM}{r} &= \text{cost.}\\ \dot{r}^2 - \tfrac{8}{3}\pi G\,r^2\varrho &= \text{cost.}\end{aligned} \tag{17–3}$$

Notate che anche se la forza è attrattiva, niente vieta che si abbia espansione: la velocità di espansione diminuirà, perché l'accelerazione è diretta verso il centro; ma l'espansione può continuare anche fino all'infinito: se questo accade o no, dipende solo dalle condizioni iniziali.

Le equazioni di evoluzione

Se ora prendiamo un sistema di coordinate come quello della fig. 16–3, con P al centro della sfera e Q sulla galassia al bordo, avremo ancora $r = R\,\vartheta$, e r varierà nel tempo perché cambia R (raggio di curvatura dell'Universo) mentre ϑ resta fisso. Allora la (17–2) ci dà subito

$$\ddot{R} = -\tfrac{4}{3}\pi GR\,\varrho. \tag{17–4}$$

Questa è proprio l'equazione del moto per il raggio dell'Universo che stavamo cercando. È opportuno mettere di nuovo l'accento sul fatto che nei limiti del nostro modello il risultato che abbiamo ottenuto *è esatto*, ossia è lo stesso a cui saremmo arrivati partendo dalle equazioni di Einstein (che non sappiamo neppure come siano fatte). Un'altra forma dell'equazione la ricaviamo allo stesso modo dalla (17–3):

$$\dot{R}^2 - \tfrac{8}{3}\pi GR^2\varrho = \text{cost.} \tag{17–5}$$

Tuttavia ho avvertito prima che avrei barato, e ora debbo svelare il trucco. Il teorema di Gauss, nel modo come lo abbiamo usato noi, vale solo per una distribuzione di massa *circondata da spazio vuoto*: altrimenti niente ci autorizza a escludere un campo gravitazionale prodotto da masse esterne, del quale non possiamo dire nulla. Neppure un argomento di simmetria ci salva, dato che in un universo omogeneo tutti i punti sono centri di simmetria. Il fatto è che la teoria newtoniana della gravitazione (da cui discende il teorema di Gauss) presuppone uno spazio euclideo, mentre qui abbiamo uno spazio che può anche essere *non euclideo* (a curvatura costante): nel nostro ragionamento ci eravamo (volutamente) dimenticati di ciò. Pertanto è assai dubbio se essere felici del risultato, e di conseguenza si può discutere sull'opportunità di una sua utilizzazione didattica. Forse sarebbe meglio mettere le carte in tavola dall'inizio, ma non so quale possa essere l'effetto.

Un altro difetto della nostra dimostrazione è nascosto nella (17–5). Per come ci siamo arrivati, sembra che la costante a secondo membro possa essere qualsiasi; invece solo il segno è arbitrario, nel senso che dalle equazioni di Einstein si ottiene sì la (17–5), ma la costante può assumere solo i tre valori 0, $+c^2$, $-c^2$ che corrispondono ai tre tipi di curvatura che abbiamo già incontrato. Riscriveremo perciò la (17–5) per tener conto di ciò, anche se non possiamo darne una giustificazione:

$$\dot{R}^2 - \tfrac{8}{3}\pi GR^2\varrho = -kc^2 \qquad (k = 0, +1, -1). \tag{17–6}$$

Il problema della singolarità iniziale

Discutiamo ora l'equazione del moto (17–4). Prima di tutto si vede che $\ddot{R} < 0$: quindi il grafico di $R(t)$ è necessariamente concavo verso il basso, e perciò dovrà incontrare l'asse delle ascisse a un'epoca la cui distanza da oggi è minore di $t_{\rm H}$. Se il nostro modello di spazio a curvatura costante è corretto, ci dev'essere stato nel passato un istante — non più lontano di $t_{\rm H}$ — a cui il raggio era nullo.

Naturalmente c'è un "se": *se questo modello è corretto.* A dire il vero, è stato dimostrato da Hawking e Penrose che in RG la singolarità ($R = 0$) esiste sotto ipotesi molto più generali di quelle poste alla base del nostro modello. Sfortunatamente però, tutta la teoria cade in difetto proprio quando ci si avvicina all'istante critico. Se $R \to 0$, ne segue $\varrho \to \infty$, e non abbiamo nessuna ragione di credere che le leggi fisiche valide nell'ambito della nostra esperienza possano essere estrapolate fino a valori infiniti della densità e di altre grandezze.

Occorre qui aggiungere un'osservazione: la RG non considera effetti quantistici. Così ad es. l'energia del campo gravitazionale nella teoria di Einstein non è quantizzata, come l'energia elettromagnetica. Il fatto è che ancor oggi nessuno sa fare la meccanica quantistica del campo gravitazionale (nel gergo dei fisici teorici si dice "quantizzare la gravità"); si sa solo per certo che a grandi densità devono intervenire effetti quantistici. Ciò per le stesse ragioni per cui, quando si considera la materia su scala atomica, non si può usare la meccanica classica. Se l'intero Universo è ridotto a una piccola sferetta, una teoria quantistica del campo gravitazionale è indispensabile. Questo è un altro motivo per cui non possiamo neppure asserire che l'estrapolazione sia sbagliata: semplicemente non si sa che cosa sia.

Possiamo solo dire, con un argomento dimensionale, per quale raggio gli effetti quantistici diventano importanti. Con le costanti fondamentali c, G e $\hbar$ si può costruire una sola lunghezza, detta *lunghezza di Planck*:

$$L_{\rm P} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1.6 \cdot 10^{-33}\,\text{cm}.$$

Certamente la RG diventa inapplicabile a tempi in cui R è dell'ordine della lunghezza di Planck. Ecco tutto ciò che possiamo dire sulla famosa questione di un'origine dell'Universo, supposta coincidere con l'istante in cui $R = 0$. La RG porta a questa previsione, ma si tratta dell'estrapolazione di qualcosa che certamente *non è estrapolabile.*

Evoluzione della densità di materia

Per risolvere l'equazione del moto ci manca ancora di sapere come varia nel tempo la densità di materia. Per rispondere, ricordiamo che uno spazio tridimensionale a curvatura costante ha un volume finito: $V = 2\,\pi^2 R^3$. La cosa importante è che il volume è proporzionale al cubo del raggio; il coefficiente di proporzionalità interessa poco ai nostri scopi.

Dunque quando cambia il raggio cambia anche il volume. D'altra parte la materia presente nell'Universo è fatta di atomi; anzi il grosso della massa sta nei nuclei, che sono poi essenzialmente barioni (protoni e neutroni) e questi nel loro insieme non cambiano di numero. (Esiste l'ipotesi che i protoni — e di conseguenza i nuclei — possano non essere stabili; sembra tuttavia accertato che la vita media è almeno 10^{32} anni, e quindi nella durata dell'Universo sono sempre molto pochi quelli che decadono.) Ma se il numero di barioni si conserva, si può anche dire che la massa totale non cambia: quindi la densità deve andare come $1/R^3$.

Possiamo dunque sostituire ϱ con b/R^3 nella (17–3), ottenendo

$$\ddot{R} = -\frac{4}{3}\frac{\pi b\,G}{R^2}$$

e questa è un'equazione differenziale che è facile integrare. Ma anche senza fare il calcolo esplicito è chiaro che la $R(t)$ è perfettamente determinata, se si conoscono le condizioni iniziali a un istante qualsiasi.

La radiazione elettromagnetica cosmica

Nel discorso c'è però un errore, perché nell'Universo non esistono solo barioni: quanto meno, c'è anche la radiazione e.m., che contribuisce anch'essa alla massa totale. In effetti stimando la quantità di energia presente oggi nell'Universo sotto forma di radiazione, si trova che è una piccola frazione, non più di un millesimo, dell'energia che si trova sotto forma di massa delle particelle (soprattutto barioni): sembra quindi di poterla trascurare. Se però oggi nel nostro Universo — che ha un volume finito — c'è della radiazione e.m., che succede quando il raggio dell'Universo cambia?

Per rispondere ragioniamo così. Prima di tutto, teniamo presente che la materia dell'Universo attualmente o è condensata in stelle — che però occupano pochissimo volume — oppure è sotto forma di atomi d'idrogeno liberi. A causa delle condizioni fisiche attuali, praticamente l'Universo è trasparente alla radiazione e.m. quasi dappertutto, ossia non c'è un'interazione apprezzabile tra la radiazione e il resto della materia. Questo vuol dire che ogni fotone viaggia indisturbato. Naturalmente ciò non è proprio vero: se io vedo la luce di una stella, è perché ci sono dei fotoni che arrivano ai miei occhi e vengono assorbiti; però quelli che vengono assorbiti sono una frazione esigua del totale. Dunque il numero di fotoni si conserva. Sia ora n il numero di fotoni per unità di volume: il numero totale sarà nV, e questo resta costante, per cui $n \propto R^{-3}$.

Chiamiamo ε l'energia di un fotone: naturalmente ci sono fotoni di tutte le possibili energie, ma possiamo pensare a un'energia media, ed è questa che indico con ε. Nell'evoluzione dell'Universo l'energia media dei fotoni non si conserva, perché l'energia dipende dalla frequenza, e la frequenza cambia — per effetto del redshift — inversamente alla lunghezza d'onda. Visto che la lunghezza d'onda è proporzionale al raggio dell'Universo, come dice la (16–1), la frequenza è inversamente proporzionale; dato che l'energia varia come la frequenza, si vede che $\varepsilon \propto 1/R$. Ne segue per la densità di energia $n\varepsilon$:

$$n\varepsilon \propto 1/R^4. \tag{17–7}$$

L'importanza di questo risultato sta nel fatto che se andiamo indietro nel tempo per la densità di massa dovuta alla materia barionica abbiamo $\varrho_\mathrm{b} \propto 1/R^3$, mentre per la densità di massa dovuta ai fotoni si trova $\varrho_\mathrm{f} \propto 1/R^4$: tutt'e due aumentano, però in una compare il raggio alla quarta potenza, nell'altra il raggio al cubo. Quindi anche se oggi ϱ_f è trascurabile rispetto a ϱ_b, andando abbastanza indietro (cioè per un R abbastanza piccolo) la situazione si capovolge: a un certo punto ϱ_f diventa più grande di ϱ_b.

Di qui si vede che non possiamo trascurare la radiazione e.m.: anch'essa contribuisce a incurvare l'Universo, perché anche l'energia totale della radiazione è massa. Dovremo dunque introdurle tutt'e due nell'equazione del moto, che così diventa più complicata. Non ce ne occuperemo in dettaglio, ma quello che abbiamo visto già ci dice che nel lontano passato gran parte dell'energia era e.m.: è questa la "palla di fuoco" (fireball) di Gamow.

La scoperta della radiazione di fondo

Per ragioni di equilibrio statistico, quella radiazione sarà una "radiazione nera," con una distribuzione spettrale data dalla legge di Planck. Quando l'Universo si espande la radiazione s'indebolisce, perché la sua densità d'energia va come $1/R^4$; però conserva il carattere di radiazione nera. Soltanto che, come diminuisce l'energia media dei fotoni, diminuirà la temperatura. In una radiazione nera l'energia media dei fotoni sarà dell'ordine di kT, dove k è la costante di Boltzmann e T la temperatura della radiazione. Dunque sarà $T \propto \varepsilon \propto 1/R$. Dobbiamo perciò aspettarci che oggi sia presente un fondo di radiazione e.m. di corpo nero, probabilmente a una temperatura abbastanza bassa.

Per stimare la temperatura bisogna andare indietro nel tempo, fino a un'epoca alla quale la radiazione interagisce ancora con la materia; vedere in quali condizioni (raggio, densità, temperatura) tale interazione cessa; e infine estrapolare da quell'epoca la temperatura con la legge $1/R$. Fatti i conti, viene fuori che oggi la temperatura dovrebbe essere di qualche kelvin.

Questa previsione fu fatta nel '48 da Alpher, Bethe e Gamow, ma allora nessuno avrebbe pensato a una verifica sperimentale. La scoperta della radiazione cosmica di fondo è dovuta a Penzias e Wilson (1965).

Come si presenta oggi la radiazione di fondo? Prendiamo $T \simeq 3\,\mathrm{K}$, perché così è stata trovata. Con $k \simeq 1.4 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$, si ha $kT \simeq 4 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{J}$: questa è l'energia media di un fotone. La frequenza si trova dividendo per la costante di Planck, e risulta dell'ordine di $10^{11}\,\mathrm{Hz}$, che significa $\lambda \simeq 3\,\mathrm{mm}$; si tratta quindi di microonde.

Questa scoperta è stato un grosso risultato a favore del modello, perché confermava una previsione di quasi vent'anni prima; eppure è avvenuta per caso. Gli scopritori erano tecnici dei Bell Laboratories, che stavano studiando sistemi di antenne a microonde per radiocomunicazioni. Uno dei requisiti di una tale antenna è che sia a basso rumore; occorre quindi provarla in condizioni in cui non riceva segnali o disturbi dalle sorgenti terrestri: la soluzione migliore è di puntarla verso il cielo. Penzias e Wilson trovarono più rumore di quello che si aspettavano; dopo i necessari controlli sul ricevitore, ne parlarono a degli astrofisici, e così venne fuori che il loro "rumore" era la radiazione già prevista tanti anni prima.

Nello *Astrophysical Journal* del '65 ci sono due lettere: quella di Penzias e Wilson, che è diventata famosa, è lunga poco più di una pagina, e porta il modesto titolo: "Misura di un eccesso di temperatura di antenna a 4080 MHz." L'altra, di Dicke e altri, è molto più lunga, e dà l'interpretazione cosmologica delle misure di Penzias e Wilson.

La scoperta della radiazione di fondo ha posto in una nuova luce il problema del "rif. privilegiato," e quindi del PR: infatti il rif. in cui quella radiazione appare isotropa è distinguibile dagli altri a causa di proprietà fisiche osservabili, e ciò sembra contraddire il PR. La premessa del ragionamento è indubbiamente giusta, ma non ha necessariamente le conseguenze che si potrebbe credere.

Spieghiamoci con un esempio banale. Nella meccanica newtoniana vale il PR: per esempio, l'urto frontale fra due auto che vanno a 50 km/h ha gli stessi effetti di quello tra un'auto che vada a 100 km/h e una ferma (non esattamente, a causa degli attriti sulla strada). Tuttavia, se io viaggio su di una strada dove si trovano incolonnati degli autocarri che vanno a 80 km/h, è soprattutto di quelli che mi debbo preoccupare, e ciò non contraddice il PR.

Analogamente, la presenza della radiazione di fondo ha certamente un effetto fisico (soprattutto ne ha avuto nella fase iniziale); ma ciò non toglie che si possa ancora parlare di rif. localmente inerziali, tra loro equivalenti perché in moto relativo uniforme.

Universo aperto o chiuso? Il futuro dell'Universo

Voglio mostrare ora come si possano trarre conclusioni almeno qualitative sui problemi posti nel titolo, semplicemente usando la (17–6), che conviene riscrivere dividendola per R^2:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \tfrac{8}{3}\pi G\varrho = -\frac{kc^2}{R^2}. \tag{17–8}$$

A primo membro si riconosce il quadrato di H (16–3), e quindi

$$\frac{kc^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho - H^2. \tag{17–9}$$

Dalla (17–9) si vede che se si conoscessero abbastanza bene i valori di H e di ϱ si potrebbe decidere il segno di k. Coi dati attuali, anche tenendo conto della materia oscura, risulta sempre $k = -1$ (spazio iperbolico). Esiste però un problema, del quale parlerò più avanti.

La (17–9) c'insegna anche un'altra cosa. Sappiamo che oggi, e a maggior ragione se R cresce, ϱ è dominata dalla materia barionica, e decresce come $1/R^3$. Perciò il primo termine a secondo membro finisce per diventare trascurabile rispetto all'altro, e questo basta per dire che se $R \to \infty$ è escluso che sia $k = 1$. Dunque se lo spazio è a curvatura positiva, R non può crescere indefinitamente: raggiunge un massimo (in cui $\dot{R} = 0$ e quindi $H = 0$) e poi torna a decrescere, ripercorrendo simmetricamente le fasi percorse durante l'espansione. Se invece $k \geq 0$ (curvatura nulla o positiva) R continua a crescere fino all'infinito. C'è dunque un legame tra il segno della curvatura e l'evoluzione futura dell'Universo.

Cose non dette e problemi aperti

Dai cenni storici che ho fatto qua e là sarà apparso chiaro che la cosmologia è una scienza giovane, e ancora in pieno sviluppo; non mancano perciò i problemi aperti, sia su argomenti che abbiamo trattato, sia su altri che non sono stati neppure sfiorati. Per fare un esempio: sebbene il PC come fatto sperimentale sia accettato concordemente, esso pone dei problemi teorici. È difficile capire come dall'esplosione iniziale si sia arrivati a una situazione così regolare. Si tratta della stessa questione cui ho fatto cenno nella lezione precedente e che ha motivato la proposta dei cosiddetti "modelli inflazionari."

Un argomento di cui non abbiamo potuto parlare sono le onde gravitazionali. La RG prevede queste onde, e fornisce espressioni quantitative per l'intensità dell'emissione e per gli effetti osservabili. La rivelazione diretta mediante "antenne gravitazionali" non è ancora avvenuta, e sistemi sempre più sensibili sono in costruzione. Però è già avvenuta una rivelazione indiretta, basata sul moto, studiato per oltre 20 anni, di un sistema binario di stelle di neutroni (premio Nobel a Hulse e Taylor nel 1993). Purtroppo il livello della nostra trattazione non mi consente di dire di più.

Dicevo sopra che i dati su ϱ e H sembrano indicare un Universo iperbolico ($k = -1$). Esistono però altri dati, basati sull'andamento del redshift con la distanza, che contraddicono questo risultato, e puntano verso un Universo "piatto" ($k = 0$). Per motivi che purtroppo non posso spiegare, anche questo è un problema: è difficile capire come mai la densità di materia sia oggi vicina a quella che genera uno spazio piatto, senza fare ipotesi inverosimili sul passato. Anche questa difficoltà ha portato a supporre che nei tempi remoti la materia dovesse avere proprietà peculiari (modelli inflazionari).

Osservazioni recenti sollevano un altro problema: le relazioni distanza-redshift paiono addirittura incompatibili con la più ovvia conseguenza della (17–4), ossia $\ddot{R} < 0$. Anche i mass-media hanno parlato di questa "accelerazione dell'espansione," che sembra richiedere una modifica delle equazioni di Einstein.

A dire il vero tale modifica è nota da tempo, ed è dovuta allo stesso Einstein, il quale quando ricavò la (17–4) vide subito che essa era incompatibile con un universo statico (R costante). A quel tempo l'espansione non era ancora stata scoperta, e sembrava naturale che l'Universo rimanesse sempre lo stesso (quindi statico). Per questo motivo Einstein corresse le sue equazioni, aggiungendo il famoso "termine cosmologico," sì da ottenere una (17–4) modificata, che ammettesse una soluzione statica. Poco dopo, quando Hubble annunciò la sua scoperta, Einstein rinnegò la correzione (che per ragioni estetiche non gli era mai piaciuta) definendola "la più grossa cantonata della mia vita."

È quindi curioso che i dati recenti sembrino richiedere di nuovo il termine cosmologico; ma è doveroso aggiungere subito che ogni decisione in merito è prematura. Meglio aspettare conferme e altri dati indipendenti; per ora il problema rimane aperto.

Problemi

1. Partendo dal valore attuale di H ($70\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$) e dall'ipotesi $k = 0$, calcolare la densità di materia ϱ. Confrontare col dato osservato: $\sim 10^{-28}\,\mathrm{kg/m^3}$.

2. A puro titolo di esercizio, senza nessuna pretesa di connessione con la realtà, studiare l'evoluzione iniziale di un universo "dominato dalla materia," ossia con $\varrho \propto R^{-3}$. Mostrare che la scelta del parametro k è irrilevante.

3. Stesso calcolo, per un universo "dominato dalla radiazione": $\varrho \propto R^{-4}$.

4. Attualmente (2005) la (17–8) viene scritta col termine cosmologico, nella forma seguente:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{kc^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho + \tfrac{1}{3}\,\Lambda \tag{17–10}$$

dove Λ è una costante positiva, che si assume pari a $2.1\,H^2 = 1.1 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{s^{-2}}$.

a) Discutere l'evoluzione futura dell'Universo, prendendo $k = 0$.

b) Trascurando per semplicità il primo termine a secondo membro nella (17–10), qual è la massima distanza attuale di oggetti dai quali sarà mai possibile ricevere luce?

Risposte

Problema 1. (Densità di materia):

Basta usare la (17–9), che per $k = 0$ fornisce

$$\varrho = \frac{3H^2}{8\pi G} \simeq 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}$$

ossia due ordini di grandezza sopra quella osservata. È questo uno degli aspetti del "problema della materia oscura."

Problema 2. (Evoluzione iniziale se domina la materia):

Possiamo partire dalla (17–8), che riscriviamo portando il termine con ϱ a secondo membro:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho - \frac{kc^2}{R^2}. \tag{17–11}$$

Se ϱ è dominata dalla materia (barionica) e quindi va come $1/R^3$, per piccoli R il primo termine a secondo membro prevale sul secondo, e questo dimostra che la scelta di k non ha importanza.

Trascurando dunque il termine in k, la (17–11) diventa

$$\dot{R} = \frac{p}{\sqrt{R}}$$

dove p è una costante. Questa si può integrare facilmente (per separazione di variabili) e porta a

$$R(t) = \left(\tfrac{2}{3}\,p\,t\right)^{2/3}$$

ossia il raggio dell'Universo cresce come la potenza $2/3$ di t.

Da qui si vede che per $t \to 0$ di nuovo $\dot{R} \to \infty$, come nel problema 16.4, dove si aveva $R \propto t^{1/2}$.

Problema 3. (Evoluzione iniziale se domina la radiazione):

Cambia molto poco rispetto al problema precedente: questa volta la (17–7) ci dice che ϱ va come $1/R^4$. A maggior ragione per piccoli R è trascurabiile il termine in k nella (17–10), e abbiamo

$$\dot{R} = \frac{p'}{R}.$$

Integrando:

$$R(t) = \sqrt{2\,p'\,t}$$

ossia proprio la forma che avevamo supposta nel problema 16.3, con $a = \sqrt{2\,p'}$.

Problema 4. (Termine cosmologico):

a) Se si pone $k = 0$ la (17–10) diventa

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \tfrac{8}{3}\pi G\varrho + \tfrac{1}{3}\Lambda.$$

Inoltre, se siamo interessati all'evoluzione futura, in cui R cresce, possiamo trascurare a secondo membro il primo termine, che va come $1/R^3$, rispetto al secondo, che è costante. Si ottiene allora

$$\frac{\dot{R}}{R} = \sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}$$

$$R = R_0\,\exp\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}\,(t - t_0)\right].$$

L'espansione assume un andamento esponenziale, quindi sempre più accelerato.

b) Il procedimento è lo stesso del problema 16.3:

$$c\,dt = ds = R\,d\vartheta = R_0\,\exp\left[\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}\,(t - t_0)\right]d\vartheta.$$

Separando le variabili e integrando:

$$\frac{R_0}{c}\,\vartheta = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} - \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,\exp\left[-\sqrt{\tfrac{1}{3}\Lambda}\,(t - t_0)\right]. \qquad (17\text{–}12)$$

È opportuno discutere brevemente la determinazione della costante. Stiamo considerando una sorgente che emette luce all'istante $t = t_0$, e ϑ denota la separazione (espressa in coordinata comovente) tra la sorgente e il rivelatore, che riceve la luce al tempo t. È allora chiaro che ϑ deve annullarsi se $t = t_0$.

Per $t \to +\infty$, la (17–12) dà

$$\frac{R_0}{c}\,\vartheta_\infty = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}}\,;$$

d'altra parte $R_0\,\vartheta_\infty$ è proprio la distanza l_e cercata:

$$l_e = c\sqrt{\frac{3}{\Lambda}} = \frac{c}{H}\,\frac{1}{\sqrt{0.7}} = 5.0\,\mathrm{Gpc}.$$

Nota: Può sembrare incoerente usare la tecnica della coordinata comovente e del raggio che si espande, che abbiamo introdotta nella lezione precedente per uno spazio sferico, quando si assume $k = 0$, ossia spazio euclideo.

Possiamo però considerare lo spazio euclideo come limite di uno spazio sferico di raggio molto grande, il che del resto è in accordo col fatto che le misure non possono mai dare per certo $k = 0$. In altre parole, lo spazio è euclideo "entro gli errori sperimentali." Ma entro gli errori si può anche assumerlo sferico, il che vuol dire che il termine con k nella (17–8) non sarà rigorosamente nullo, ma solo trascurabile entro gli errori.

APPENDICE 1

Dialogo sulla massa relativistica

da *La Fisica nella Scuola*, **14** (1981), 25

Mi è sembrato che l'argomento di questo scritto si prestasse meglio a essere trattato in forma di dialogo. La mia fantasia non è stata in grado di dare un nome ai protagonisti: ci si diverta il lettore, se vuole.

A: So che a te non piace sentir dire che la massa relativistica dipende dalla velocità. Mi vuoi spiegare perché?

B: Comincia tu invece a spiegarmi perché secondo te va bene parlare di variazione della massa con la velocità.

A: D'accordo. In primo luogo mi baso sulla formula dell'impulso:

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{A1–1}$$

Dalla (A1–1), insieme con la nota relazione $\vec{p} = m\vec{v}$, segue necessariamente

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{A1–2}$$

B: Ci converrà introdurre la solita abbreviazione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

e la (A1–1) si potrà scrivere

$$\vec{p} = m_0 \gamma \vec{v}. \tag{A1–1$'$}$$

Da questa segue la (A1–2) se si vuole mantenere la relazione $\vec{p} = m\vec{v}$, ma chi ci obbliga a questo? Io preferisco dire che la formula relativistica è

$$\vec{p} = m_0 \vec{u} \tag{A1–3}$$

dove $\vec{u} = \gamma\vec{v}$ è una grandezza relativistica che prende il posto della velocità (tra parentesi, $\vec{u}$ è la parte spaziale della quadrivelocità).

A: Mi sembra che fin qui sia solo questione di gusti. Ma se è vero che la massa misura l'inerzia, e che nella dinamica relativistica a parità di forza l'accelerazione diminuisce fino a zero quando la velocità si avvicina a c, non dovremo dire che m cresce da m_0 a ∞?

B: Qui ti volevo! Tu sai certamente che la forma relativistica della $\vec{F} = m\vec{a}$ è molto più complicata: occorre distinguere tra componenti longitudinali e trasversali, che seguono leggi diverse:

$$\vec{F}_{\text{long}} = m_0 \gamma^3 \, \vec{a}_{\text{long}} \tag{A1–4a}$$

$$\vec{F}_{\text{trasv}} = m_0 \gamma \, \vec{a}_{\text{trasv}} \tag{A1–4b}$$

Dovremo dunque parlare di due masse, una longitudinale e una trasversale (qualcuno lo fa); e solo la seconda cresce come γ, mentre l'altra va come γ^3. Non è meglio dire che $\vec{F} = m\vec{a}$ vale solo al limite di piccole velocità, mentre la forma valida in generale è

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{A1–5}$$

dove p ha l'espressione (A1–3) oppure (A1–1′)?

A: Riconosco che questa storia delle due masse da un po' fastidio anche a me. Ricordo ancora il rasoio di Occam: "entia non sunt multiplicanda præter necessitatem."

B: Vedo che anche tu ammetti l'importanza del latino: una bella citazione fa sempre il suo effetto. Ma portami qualche altro argomento per la tua tesi, se ne hai.

A: Sta tranquillo, gli argomenti non mancano. Per esempio, che ne dici dell'equivalenza massa-energia?

B: Ahi, ahi, me l'aspettavo!

A: Perché, tu non credi nemmeno a $E = mc^2$?

B: Non si tratta di credere: quella è una relazione importantissima, in mano a chi ne capisce il significato. Però viene usata così spesso a sproposito, che non mi dispiacerebbe un decreto-legge (fra tanti che se ne fanno) che ne vietasse l'uso senza patente. Ma tu la patente ce l'hai, o almeno spero, perciò prosegui pure.

A: Grazie. Ma non mi sembra di dover aggiungere molto. Se l'energia aumenta, deve aumentare anche la massa...

B: Potresti farmi un esempio di applicazione di $E = mc^2$?

A: Subito. Metti un pezzo di ferro su un fornello a gas. Quando il ferro si scalda, la sua energia aumenta, e così anche la sua massa, anche se di pochissimo.

B: Ottimo esempio; ma non ho capito dove entra la velocità. II ferro non schizza via dal fornello quando è caldo.

A: Siamo serii! Sai benissimo che la velocità è quella degli atomi che costituiscono il pezzo di ferro ...

B: Scusa un attimo: vorrei vedere se ho capito. Tu stai supponendo, mi pare, i seguenti fatti:

a) il ferro è composto di atomi

b) la massa del pezzo di ferro è la somma delle masse dei suoi atomi

c) al crescere della temperatura gli atomi si muovono più velocemente, e la loro massa aumenta

d) ergo (latino) anche la massa del pezzo di ferro aumenta.

A: Hai capito benissimo; e poiché sei d'accordo con la conclusione ...

B: ... dovrei essere d'accordo con le premesse? "Io non sapeva che tu loico fossi" ma qui come loico sei un po' deboluccio: una conclusione può essere valida anche se le premesse sono sbagliate.

A: E dove sarebbe lo sbaglio?

B: Per spiegartelo, permettimi di cambiare esempio. Hai presenti i mesoni K?

A: Mi sembra che siano particelle della classe degli adroni, di massa circa 974 volte quella dell'elettrone. Ce ne sono diverse specie, sono instabili e hanno svariati modi di decadimento ...

B: Va bene, va bene, vedo che ne sai più di me! A noi basta il modo di decadimento più semplice del K^0 (neutro). Questo può decadere in due pioni (mesoni π) di cariche opposte e di uguale massa:

$$\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^- . \qquad \text{(A1–6)}$$

Vorresti per favore applicare $E = mc^2$ a questo processo?

A: Facilissimo. Supponiamo che il K^0 sia fermo. La massa a riposo dei pioni è circa 273 masse elettroniche. Nel decadimento c'è una diminuzione di massa di $974 - 2 \times 273 = 428$ masse elettroniche: questa massa si converte in energia, che si ritrova come energia cinetica dei prodotti di decadimento. Poiché una massa elettronica equivale a circa 0.51 MeV, ciascuno dei pioni avrà un'energia cinetica di 109 MeV.

B: Molto bene. Niente da dire sui calcoli, ma ci sono due cose che non capisco. La prima è questa: per quanto ne so, la relatività non nega la conservazione dell'energia, anzi la rende anche più generale che nella meccanica newtoniana. Poiché il nostro sistema (il K che decade) è isolato, la sua energia deve restare costante: dunque da dove viene questa energia dei pioni?

A: Ma è proprio così! L'energia totale dei due pioni è la stessa che aveva il K all'inizio: ciascun pione ha 139 MeV per la sua massa a riposo, e 109 MeV di energia cinetica, totale 248 MeV. Per i due pioni fanno 496 MeV. Il K ha una massa di 974 masse elettroniche, equivalenti ancora a circa 496 MeV. Come vedi, I'energia si conserva, solo che ha cambiato forma: da energia di riposo si è in parte convertita in energia cinetica. Per fare un esempio semplice, è come quando mangio un piatto di pastasciutta ...

B: Per carità, codesta pastasciutta relativistica lasciala ai divulgatori da strapazzo. Dunque l'energia si conserva: allora parlare di conversione di massa in energia mi sembra che serva più che altro a confondere le idee.

A: A me sembra solo questione d'intendersi.

B: E ti pare poco! Ma ecco il secondo dubbio. Se la massa dipende dalla velocità, i pioni finali avranno una massa maggiore di quella a riposo: non se ne dovrebbe tenere conto?

A: Giusto. Bisognerebbe calcolarla ... Debbo prima trovare la velocità ...

B: Non ce n'è bisogno. Basta ricordare che l'energia totale di un corpo in moto (energia di riposo più energia cinetica) è

$$E = m_0 \gamma\, c^2 \qquad \text{(A1–7)}$$

cioè proprio la *tua* massa moltiplicata per c^2. La massa di un pione in moto, proveniente da questo decadimento, è dunque 248 MeV ...

A: Vedi che anche tu identifichi massa ed energia, al punto di usare le stesse unità!

B: Questa obiezione non è degna di te. Intanto non mi sono mai sognato di negare la stretta connessione di massa ed energia, e poi che c'entrano le unità di misura? Forse energia cinetica e potenziale sono la stessa cosa, perché si misurano con le stesse unità? Ti sentiresti autorizzato a confonderle?

A: Va bene, come non detto. Tornando al K ...

B: La massa dei due pioni (la *tua* massa) è 496 MeV, cioè 974 masse elettroniche, esattamente uguale a quella del K. Dove è finita la conversione di massa in energia?

A: Prima di tutto non mi piace che tu continui a parlare della *mia* massa, come se io fossi il solo a parlare di massa che dipende dalla velocità. Mi pare che l'idea sia molto antica; ne parlavano già Lorentz e Abraham prima della relatività ...

B: Appunto: è un'idea antica, io direi piuttosto antiquata. Oggi non la troverai in nessun libro dei maggiori: ci sono rimasti attaccati solo i testi divulgativi e (purtroppo) quelli per le scuole secondarie. Io dico la *tua* massa perche non è la mia, per chiarezza. Ma non menare il can per l'aia: rispondi alla mia domanda!

A: Lasciami pensare... Non avevo mai guardato la cosa da quel punto di vista... Credo di avere capito: la massa m (dipendente dalla velocità) corrisponde all'energia totale della particella; perciò la somma delle masse si conserva nel decadimento, come si conserva l'energia. È solo la somma delle masse di riposo che non si conserva!

B: Mi fa piacere che tu abbia raggiunto questa conclusione. Ma allora devi deciderti: se ci tieni alla massa dipendente dalla velocità, non puoi parlare di conversione di massa in energia. Se invece accetti d'intendere per massa sempre e solo la massa a riposo, allora ci sono casi in cui la somma delle masse non si conserva: ad es. in $\mathrm{K}^0 \to \pi^+ + \pi^-$ la somma delle masse a riposo diminuisce e la differenza si ritrova come energia cinetica.

A: E secondo te qual è la soluzione migliore?

B: Mi sembra evidente. La tua massa, dipendente dalla velocità, è solo un altro nome per l'energia, magari con una diversa unità di misura. Perciò io invoco di nuovo il rasoio di Occam, e preferisco non usare due parole diverse per un solo concetto; tanto più che il termine "massa" ha un suo uso specifico, e per di più necessario ...

A: Scusa se t'interrompo, ma vorrei tornare al pezzo di ferro: non ho ancora capito dov'era lo sbaglio.

B: Ti rispondo subito; ma lasciami dire un'altra cosa, prima che mi passi di mente. Che mi dici dei fotoni?

A: In che senso?

B: Tutti sanno che i fotoni sono particelle di massa nulla; ora nessun fotone può mai essere fermo, e d'altra parte si sa che un fotone ha energia $h\nu$ (che non è mai zero). Come si concilia questo con la tua definizione di massa relativistica?

A: Capisco quello che vuoi dire: la mia massa per un fotone non dovrebbe essere mai zero. Effettivamente c'è una contraddizione. Ma tu come la risolvi?

B: Non posso risponderti subito; conviene prima tornare al pezzo di ferro riscaldato. Non direi che nel tuo ragionamento ci sia uno sbaglio, ma è chiaro che dopo quello che abbiamo visto bisogna fare una scelta. Se la massa è solo un altro nome per l'energia, quello che tu hai detto va bene; ma poi, come sappiamo, sorgono altre difficoltà. Se invece "massa" è la massa a riposo, allora:

a) non è vero che la massa del pezzo di ferro è la somma delle masse dei suoi atomi;

b) la massa degli atomi non cambia con la velocità.

A: Un momento: su *b*) potrei anche essere d'accordo, stando al tuo punto di vista; ma che cos'è questa novità che la massa di un oggetto non è la somma delle masse dei suoi costituenti? Dove andiamo a finire di questo passo?

B: Andiamo a finire nella relatività, e in qualcosa di anche più profondo. Ti faccio un altro esempio. Pensa a un reattore nucleare, così ben schermato che non ne esca né radiazione di alcun genere, né calore; e che per di più funzioni a vuoto, cioè senza essere collegato a una turbina o altra macchina: insomma un reattore del tutto isolato dal punto di vista energetico. Ti chiedo: la massa del reattore varia nel tempo o no?

A: Mi sembra un bel pasticcio. Se penso alle reazioni nucleari dentro il reattore, so che una fissione si accompagna a un difetto di massa; perciò la massa dovrebbe diminuire. Però se guardo il reattore nel suo insieme non vedo come la massa possa diminuire senza che il reattore perda energia. Per di più la temperatura nel reattore andrà sempre aumentando ...

B: E infatti bisogna assolutamente evitare che un reattore si trovi in quelle condizioni!

A: ... e perciò la massa di tutte le particelle dovrebbe aumentare per l'agitazione termica... Insomma non ci capisco niente.

B: In effetti hai fatto un po' di confusione, mescolando di nuovo i due significati della massa. Se pensiamo solo alla massa a riposo, hai detto due cose giuste:

a) la somma delle masse dei costituenti (nuclei, neutroni, ecc.) va diminuendo: è questo il difetto di massa;

b) la massa del reattore non cambia, perché non cambia la sua energia.

Questo è possibile, e non c'è contraddizione, proprio perché la massa del reattore non è la somma delle masse delle particelle che lo costituiscono.

A: E che cos'è allora?

B: Basta usare $E = mc^2$, scritta così: $E_0 = m_0c^2$. La massa del reattore, che è fermo, è uguale alla sua energia totale (misurata nel sistema di riferimento in cui è fermo, e tenendo conto di tutte le energie in esso contenute) divisa per c^2. Questa energia E_0 si può chiamare "energia di quiete" o anche "energia interna."

A: Aspetta: provo a concludere io. Poiché nel tuo esempio E_0 non cambia, neanche m_0 cambia. Credo di avere capito. Ma così non hai di nuovo identificato massa ed energia? Non mi avevi criticato prima per questo?

B: Infatti. Ma la differenza è questa: io riservo il termine "massa" per l'energia in una particolare situazione, quella di un corpo in quiete. In questo modo la massa (cioè l'energia di quiete, a parte il fattore c^2) acquista una proprietà importante: quella di essere un invariante, cioè di non dipendere dal sistema di riferimento, mentre l'energia evidentemente ne dipende.

A: Come può essere invariante la massa del pezzo di ferro, se aumenta quando lo scaldo!

B: Invariante non vuol dire costante nel tempo; vuol dire che la grandezza ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento.

A: Continuo a non capire: se tu stesso hai detto che mi debbo mettere nel riferimento di quiete, significa che il riferimento non è indifferente!

B: Hai ragione: nel desiderio di essere breve sono stato poco chiaro. In effetti non è necessario mettersi nel riferimento di quiete per determinare la massa. Anzi certe volte non è possibile: non posso sempre fermare una particella che attraversa il mio apparato, eppure posso ugualmente trovarne la massa.

A: E come si fa?

B: Prendi la (A1–1′) e la (A1–7). Basta un po' di algebra per ricavarne:

$$E^2 - c^2p^2 = m^2c^4 \tag{A1–8}$$

che è forse la relazione più importante di tutta la relatività. Con la (A1–8) tu vedi che si può calcolare m_0 dalla misura di E e di p. Ma quello che è più notevole, è che se tu ed io ci troviamo in riferimenti diversi troveremo diverse energie e diversi impulsi per lo stesso oggetto, ma a conti fatti la (A1–8) ci darà la stessa massa. È questo che s'intende per invariante.

A: Vedo. E se in particolare io sto nel riferimento di quiete, dove $p = 0$, misurerò una E_0 che vale proprio m_0c^2. E il caso del fotone?

B: Un fotone ha un'energia $h\nu$ e un'impulso $h\nu/c$: perciò usando la (A1–8) trovi subito $m_0 = 0$. Parlare di massa nulla per i fotoni non vuol dire altro che questo.

A: Il quadro ora mi appare molto più chiaro. Possiamo concludere?

B: Non ancora: vorrei porti un altro problema. Se al posto del reattore di prima pensi un forno a carbone, con la sua riserva di ossigeno, che cosa mi puoi dire?

A: Non vedo il problema: se l'energia non cambia, la risposta è la stessa di prima... Un momento! Questa volta non ci sono reazioni nucleari, perciò $E = mc^2$ non c'entra...

B: Me l'aspettavo. Debbo chiederti scusa per il trabocchetto, ma mi serviva per farti notare un altro luogo comune da sfatare. Vuoi spiegare meglio quello che hai detto?

A: Se ti diverti a prendermi in castagna, non parlo più...

B: Ti ho già chiesto scusa: era solo un espediente dialettico.

A: Accolgo le scuse, ma non ci riprovare. So che la fissione nucleare è possibile grazie al difetto di massa, che permette di ottenere prodotti di reazione con notevole energia cinetica; ma in un forno a carbone non si tratta di reazioni nucleari, e non ho bisogno della relatività per spiegarne il funzionamento.

B: Hai ragione e torto nello stesso tempo. Non c'è bisogno della relatività per spiegare una reazione chimica, ma questo non vuol dire che nella combustione del carbone non ci sia difetto di massa: è solo molto più piccolo che nel caso nucleare, ma in linea di principio non c'è nessuna differenza. Quanto alle reazioni nucleari, è vero che il difetto di massa è apprezzabile (dell'ordine dell'uno per mille delle masse in gioco) ma questo è un effetto, non una causa: vuole solo dire che le forze nucleari sono molto più grandi dei legami chimici, e perciò di altrettanto più grandi sono le variazioni di energia nelle reazioni.

A: In altre parole: tu vorresti dire che le bombe atomiche non sono colpa di Einstein.

B: Se ti piace lo stile giornalistico puoi anche metterla così. Certo se Einstein c'entra qualcosa con Hiroshima non è per la relatività: se anche la relatività non fosse stata inventata, questo non avrebbe impedito gran parte degli sviluppi della fisica nucleare, fissione e bombe incluse.

A: Ora potremmo davvero concludere. Però ...

B: Però?

A: Mi dispiace di dover rinunciare all'additività della massa. Dopotutto, l'idea che la materia sia fatta di costituenti elementari, e quella che la massa di un oggetto sia la somma delle masse dei suoi "mattoni" mi sembrano strettamente collegate.

B: Hai perfettamente ragione: è per questo che prima ho parlato di qualcosa di più profondo. Quello che sappiamo oggi sulla costituzione della materia lascia molti dubbi sulla possibilità di parlare di "costituenti elementari": una volta c'erano gli atomi (gli indivisibili), poi si sono scoperti elettroni e nuclei, poi si sono visti i nucleoni dentro i nuclei, ora si parla di quarks, di gluoni (anche se nessuno li ha ancora visti)... E domani?

A: Ma ci saranno bene delle entità fondamentali, ultime, di cui tutto il resto è costituito!

B: Non è detto. E del resto c'è un'altra difficoltà. Torniamo al nostro mesone K: sai per caso come si spiega la sua struttura in termini di quarks?

A: Credo che un K, come tutti i mesoni (anche i pioni) sia composto di un quark e di un antiquark; ma non ho capito bene la storia dei sapori e dei colori...

B: Non importa. Dunque $\mathrm{K}_0 = (q\bar{q})$ e lo stesso vale per π^+ e π^-. Allora la (A1–6) si legge:

$$(q\bar{q}) \rightarrow (q\bar{q}) + (q\bar{q}).$$

Da dove vengono il nuovo quark e il nuovo antiquark? Questo è un fatto generale: le particelle non sono entità permanenti, inalterabili, neanche al livello dei quarks. Perciò è una fortuna che la relatività ci chieda di abbandonare l'idea della massa additiva. O meglio: di qui si capisce che una teoria della costituzione della materia deve per forza essere relativistica. Se la cosa ti lascia insoddisfatto, posso solo ripeterti una frase cara a Feynman: "This is the way things are" (è così che stanno le cose, così è fatto il mondo).

A: È strano: non mi sembra che abbiamo mai divagato, eppure ci troviamo un bel po' lontani dal punto di partenza…

B: Il fatto è che quando si ragiona ogni cosa si lega alle altre. È qui che sta il bello (e anche il difficile) della fisica…

Gli argomenti di questo dialogo sono trattati in qualunque buon testo di relatività. Se proprio debbo dare un'indicazione (una sola) consiglio "Spacetime Physics" di Taylor e Wheeler (Freeman).

APPENDICE 2

Costanti e grandezze utili

Sperando di far cosa utile al lettore, ho riunito in questa Appendice i dati numerici su grandezze di tutti i tipi che figurano nel testo e nei problemi.

Si noterà che esiste una certa disomogeneità, soprattutto nel numero di cifre significative, ma è in parte voluta e in parte inevitabile. In alcuni casi serve l'ordine di grandezza o poco più; in altri, della grandezza si sa dare solo una stima; in casi estremi invece sono note o definite parecchie cifre significative, che per di più in qualche problema sono necessarie.

Anche sulle unità di misura non ho sempre seguito una linea coerente, ma ho scelto l'unità più usata, oppure quella che dà meglio un'idea dell'ordine di grandezza.

Grandezze astronomiche

Terra e sistema solare:
Raggio della Terra: $6.4 \cdot 10^3$ km.
Velocità della rotazione terrestre all'equatore: 460 m/s.
Distanza media Terra–Luna: $3.84 \cdot 10^5$ km.
Parallasse diurna della Luna: $\simeq 1°$.
Distanza del centro di massa Terra–Luna dal centro della Terra: $4.8 \cdot 10^3$ km.
Velocità orbitale (media) della Luna: 1.0 km/s.
Distanza Terra–Sole (circa 1 UA): $1.496 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m} \simeq 500$ secondi-luce.
Parallasse diurna del Sole: $\simeq 9''$.
Velocità orbitale (media) della Terra: 29.8 km/s.
Massima elongazione di Venere dal Sole: 46.3°.
Semiasse dell'orbita di Giove: $7.78 \cdot 10^8$ km.
Massa della Terra: $5.98 \cdot 10^{24}$ kg.
Massa del Sole: $1.99 \cdot 10^{30}$ kg.
Densità media del Sole: $1.4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$.
Luminosità del Sole: $4 \cdot 10^{26}$ W.
Campo gravitazionale del Sole alla distanza della Terra: $6 \cdot 10^{-3}$ N/kg.

Galassia e galassie:
Distanza di α Centauri: $1.3\,\mathrm{pc} = 4.0 \cdot 10^{16}$ m.
Velocità delle stelle vicine al Sole: fino e oltre 100 km/s (rispetto al Sole).
Distanza del Sole dal centro della Galassia: $10^4\,\mathrm{pc} \simeq 3 \cdot 10^4$ al.
Periodo orbitale del Sole attorno al centro della Galassia: $2.5 \cdot 10^8$ anni.
Massa del nucleo della Galassia: $1.3 \cdot 10^{11}\,M_\odot$.
Numero di stelle in una galassia: $\sim 10^{11}$.
Distanza media fra le stelle in una galassia: alcuni anni-luce.
Distanza media fra le galassie: $\sim 10^7$ al.
Numero di galassie nell'Universo visibile: $\sim 10^{11}$.

Parametri cosmologici

Densità della materia visibile nell'Universo: $\sim 10^{-28}\,\mathrm{kg/m^3}$.
Costante di Hubble: $H = (70 \pm 3)\,\mathrm{km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}}$.

Tempo di Hubble: $1/H = 1.4 \cdot 10^{10}$ anni.
Dimensioni dell'Universo visibile: $\sim 10^{10}$ al.
Costante cosmologica: $\Lambda = 2.1\, H^2 = 1.1 \cdot 10^{-35}\,\mathrm{s}^{-2}$.
Temperatura della radiazione di fondo: 2.7 K.

Grandezze atomiche e nucleari
Massa dell'elettrone: $0.51\,\mathrm{MeV/c^2}$.
Massa del protone: $0.94\,\mathrm{GeV/c^2}$.
Energia di ionizzazione dell'idrogeno: 13.6 eV.
Diff. di energia tra livello fondamentale e primo livello eccitato dell'idrogeno: 10.2 eV.
Massa dell'atomo di ^{85}Rb: $1.4 \cdot 10^{-25}$ kg.
Diff. di energia tra livello fondamentale e primo livello eccitato del rubidio: 1.6 eV.
Energia di legame del nucleo ^{4}He: 28.3 MeV.
Massa dell'atomo ^{3}H: $2809.4327\,\mathrm{MeV/c^2}$.
Massa dell'atomo ^{3}He: $2809.4141\,\mathrm{MeV/c^2}$.
Massima energia cinetica degli elettroni emessi nel decadimento di ^{3}H: 18.6 keV.
Massa del K^0: $498\,\mathrm{MeV}/c^2$.
Vita media del K^0: $9 \cdot 10^{-11}$ s.
Massa dei pioni π^+, π^-: $140\,\mathrm{MeV}/c^2$.

Definizioni
Definizione del secondo: 9 192 631 770 cicli della transizione iperfina del ^{133}Cs.
Definizione del metro: si assume per c il valore esatto di 299 792 458 m/s.
Lunghezza di Planck: $L_\mathrm{P} = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.6 \cdot 10^{-33}$ cm.
Definizione del parsec (pc): $180 \cdot 3600/\pi\,\mathrm{UA} \simeq 2.06 \cdot 10^5\,\mathrm{UA} \simeq 3.09 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} \simeq 3.26\,\mathrm{al}$.

Dati diversi
Il TU nel corso del 20-mo secolo ha perso circa un minuto.
Raggio orbitale di un satellite geostazionario: $4.22 \cdot 10^4$ km.
Raggio orbitale dei satelliti GPS: $2.66 \cdot 10^4$ km.
Altezza della Torre Pendente: 52 m.
Densità dell'aria in condizioni normali: $1.3\,\mathrm{kg/m^3}$.
Variazione di entalpia nella reazione $2\mathrm{H}_2 + \mathrm{O}_2 \to 2\mathrm{H}_2\mathrm{O}$: 572 kJ.
Calore di evaporazione (più correttamente: entalpia specifica di evaporazione) per l'acqua a 100°: $2.26 \cdot 10^6$ J/kg.

Effetti di RG
Deflessione gravitazionale della luce radente al Sole: $1.75''$.
Precessione del perielio di Mercurio: $43''$ per secolo.
Differenza dei tempi nell'esperimento H–K: (332 ± 20) ns in 50 ore.
Differenza dei tempi nell'esperimento B–L: 2.4 μs in due mesi (dislivello 3250 metri).
Correzione degli orologi nei satelliti GPS: 10.22999999545 MHz contro 10.23 MHz nominali.
Tempo proprio di un orologio sulla Terra: oscilla di 1.7 ms, con periodo di un anno, rispetto a un orologio in orbita circolare.

Grandezze utili in RG
1 metro equivale a $1.35 \cdot 10^{27}$ kg.
La massa della Terra è $4.44 \cdot 10^{-3}$ m.
La massa del Sole è $1.48 \cdot 10^{3}$ m.

APPENDICE 3

Una sperimentazione di Relatività

di Massimo Coluccini

Descrizione della sperimentazione

Dall'anno 1995 presso il Liceo Scientifico "A. Vallisneri" di Lucca è stata introdotta la Relatività come disciplina curricolare, da affiancare al corso di Fisica a partire dalla classe terza.

Ciò è stato possibile in quanto il Liceo "A. Vallisneri" ha aderito ad un progetto di sperimentazione guidato dal Ministero dell'Istruzione, Università e Ricerca, il cosiddetto "Progetto Proteo," che prevede, accanto alle discipline curricolari contenute nel quadro orario nazionale, la possibilità di inserire altre materie di studio, individuate direttamente dal collegio dei docenti della scuola in cui il progetto viene attuato.

Nell'ambito della sperimentazione ad orientamento scientifico del Progetto Proteo, il collegio dei docenti del Liceo "A. Vallisneri" ha deciso di potenziare l'insegnamento delle materie scientifiche e, in particolare, della Fisica.

La scelta è stata allora quella di proporre l'inserimento dell'Astronomia nel biennio e della Relatività e Fisica Quantistica nel triennio, da affiancare, rispettivamente, alla disciplina di Laboratorio di Fisica-Chimica nel biennio ed al corso istituzionale di Fisica nel triennio.

È opportuno precisare che l'introduzione delle nuove discipline di studio è stata possibile poiché ci si è avvalsi delle proposte didattiche in merito, elaborate dal professor Elio Fabri.

Per quanto riguarda l'insegnamento della Relatività, è stato allora organizzato un corso di aggiornamento biennale riservato a docenti di Fisica e di Matematica e Fisica, nel quale sono stati discussi gli argomenti e le metodologie adatti all'introduzione della teoria della Relatività nella scuola secondaria superiore. I contenuti del corso sono quelli presenti in questo quaderno.

Per la Fisica Quantistica la proposta didattica attuata è quella che il professor Fabri ha presentato all'Aquila nel 1999, in occasione della scuola estiva per docenti di Fisica organizzata dall'A.I.F.

Per quanto riguarda invece l'insegnamento dell'Astronomia nel biennio, si è fatto riferimento ad un altro progetto didattico, il cosiddetto "Progetto Cascina."

La sperimentazione del "Progetto Proteo" è tuttora attiva presso il Liceo "A. Vallisneri" secondo il quadro orario seguente: nella prima e nella seconda classe del Liceo Scientifico Proteo sono previste quattro ore settimanali di Laboratorio di Fisica-Chimica e due ore settimanali di Astronomia; nella terza classe del suddetto liceo sono previste tre ore settimanali di Fisica e due ore settimanali di Relatività; nella quarta classe sono previste due ore settimanali di Fisica e due ore settimanali di Relatività, mentre nella quinta classe sono previste tre ore settimanali di Fisica e due ore settimanali di Fisica Quantistica.

Presso il Liceo Scientifico "A. Vallisneri" è attivo anche un altro progetto di sperimentazione guidata: la cosiddetta sperimentazione "Quinquennio Autonomia Scientifico," avviata nel 1997.

Nell'ambito di tale progetto le ore settimanali destinate all'insegnamento della Fisica sono quattro nella terza classe, tre nella quarta classe e cinque nella quinta classe. In alcune classi che sperimentano il progetto "Quinquennio Autonomia Scientifico" viene affrontato lo studio della Relatività, secondo la stessa scansione annuale prevista dal Progetto Proteo.

Gli appunti presentati qui di seguito sono due esempi di "traduzione" ad uso di studenti di liceo di alcune lezioni da introdurre nei corsi di Relatività per le classi della sperimentazione Proteo ad orientamento scientifico.

Come modello per queste dispense sono stati presi gli appunti del "Progetto Cascina," e sono perciò volutamente scritte come un canovaccio che deve essere completato dagli studenti dopo discussioni, congetture ed esperimenti.

Alcuni problemi sono nati da queste discussioni e sono stati conservati i nomi dei ragazzi che hanno espresso le idee contenute nei vari problemi affrontati o che hanno risposto alle domande che sono state loro proposte.

Oltre a questi appunti costruiti insieme ai ragazzi, è in adozione come libro di testo il volume dal titolo *Fisica dello spazio-tempo* di Taylor e Wheeler, utilizzato soprattutto come fonte ed ispirazione di numerosi problemi e esercizi.

Nella terza classe si affrontano i primi 5 capitoli del testo di Taylor e Wheeler ed i relativi contenuti corrispondono grosso modo alle prime 10 lezioni di questo Quaderno.

Nella quarta classe si affronta lo studio della dinamica relativistica e viene ripreso il principio di equivalenza, per concludere con la trattazione del problema della curvatura dello spazio-tempo.

Per questa ultima parte viene utilizzato, come guida per l'insegnante, un testo scritto dal professor Fabri, intitolato *Per un moderno insegnamento della Relatività* e pubblicato a suo tempo dalle sezioni A.I.F. di Pisa e di Lucca.

Utilissimi supporti didattici sono inoltre i seguenti film della serie PSSC: *Tempo e orologi*, *Sistemi di riferimento*, *La dilatazione del tempo*, *La velocità limite* e *La pressione della luce*.

Dopo molti anni, ormai all'incirca dieci, di sperimentazione sul campo, tenuto conto anche delle osservazioni degli allievi, alcuni dei quali si sono poi laureati in Fisica o Matematica, si può affermare che la Relatività non presenti difficoltà maggiori di tante altre parti della Fisica, anzi!

Per di più, lo studio della Relatività è molto apprezzato dagli studenti e questi ultimi riescono così a farsi un'idea rigorosa di una parte della Fisica moderna che, se affrontata senza la guida di un insegnante e senza un'opportuna metodologia didattica, corre il rischio di rimanere un misto di stranezze, paradossi e confusione.

Giudizi decisamente positivi sull'insegnamento della Relatività nella scuola secondaria superiore sono stati espressi in questi anni anche dagli allievi dell'indirizzo Fisico-Matematico della SSIS-Toscana, i quali hanno potuto spesso seguire dal vivo in classe alcune lezioni di Relatività, che sono in genere molto partecipate, con interventi anche da parte di quegli alunni che solitamente sono poco interessati a prendere parte ad una discussione che coinvolga i compagni e l'insegnante.

In volo libero

> "In quel momento ebbi l'idea più felice della mia vita ... per un osservatore che cade liberamente dal tetto di una casa, durante la caduta non esiste alcun campo gravitazionale, almeno nelle sue immediate vicinanze ..."
>
> (*Albert Einstein*)

... ma l'avventura che ha portato alle più sconvolgenti scoperte sulla natura dello spazio-tempo è iniziata molto tempo prima, diamo ancora una volta la parola a Galileo:

> "Tra palle d'oro, di piombo, di rame, di porfido, o di altre materie gravi, quasi del tutto insensibile sarà la disegualità del moto per aria, ché sicuramente, una palla d'oro nel fine della scesa di cento braccia non preverrà una di rame di quattro dita; veduto, dico, questo, cascai in opinione che se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie descenderebbero con eguale velocità."

Cerchiamo di capire cosa ci vuole dire Galileo e, per questo scopo, facciamo i seguenti semplici esperimenti.

Esperimento 1:
Lasciamo cadere un foglio e un mazzo di chiavi.

Esperimento 2:
Lasciamo cadere un foglio "accartocciato" e un mazzo di chiavi.

Esperimento 3:
Lasciamo cadere un foglio appoggiato sul registro e un mazzo di chiavi.

Ha ragione Galileo?

Pare proprio di sì ... effettivamente riducendo la resistenza del mezzo, e ciò è stato fatto o accartocciando il foglio, o poggiandolo sul registro, il mazzo di chiavi e il foglio di carta sembrano toccare contemporaneamente il pavimento.

Questa scoperta, come vedremo, ha conseguenze molto importanti. Ma prima diamo alcune definizioni.

Parleremo spesso di "riferimento" intendendo con questo termine un laboratorio rigido, dotato di tutti gli strumenti che ci servono... Esempi: un'astronave in orbita, questa stanza, un camper che viaggia sull'autostrada, una giostra, un camper che viaggia su una strada di montagna...

Chiameremo "riferimento in volo libero" o "ascensore di Einstein" un riferimento soggetto solo alla forza gravitazionale.

Che succede in un riferimento in volo libero se un ragazzo lascia cadere una mela o versa dell'acqua o accende una candela o ...

Puoi fare altri esempi e discutere: tieni conto di ciò che abbiamo imparato dal brano di Galileo precedentemente letto. Prima di rispondere puoi fare i seguenti esperimenti che ti aiuteranno a capire meglio cosa succede in un riferimento in volo libero.

Esperimento 4: Bottiglia bucata piena d'acqua in caduta libera.

Prendiamo una bottiglia di plastica, di quelle per l'acqua minerale. Facciamo due fori sotto la metà della bottiglia, riempiamola d'acqua e lasciamola cadere da una finestra. Che succede prima che sia lasciata cadere? e durante la caduta?

Potete provare anche a lanciare la bottiglia in alto o a passarvela come una palla (avendo cura di mantenere la bottiglia verticale). Che succede mentre la bottiglia vola? L'acqua continua a cadere?

Esperimento 5:

Prendi una bottiglia di plastica, di quelle usate per l'acqua minerale. Prendi uno spago e legaci un peso di piccole dimensioni, in modo che entri dentro la bottiglia. Introduci il pendolo così costruito dentro la bottiglia e fissalo con il tappo. Quando la bottiglia è ferma il pendolo è teso.

Quali sono le forze che agiscono sulla massa legata allo spago?

Che succede se lascio cadere la bottiglia?

Esperimento 6:

Prendi due tavolette e appoggiale all'estremità di una tavoletta più grande. Legale entrambe a un elastico e fallo girare esternamente intorno alla tavoletta più grande in modo che l'elastico sia teso, ma non troppo, e che le tavolette piccole siano in equilibrio.

Quali forze agiscono sulle tavolette piccole?

Che succede se lascio cadere le tavolette?

Fantafisica

Mettiamo alla prova la nostra immaginazione, tenendo conto di quello che abbiamo imparato...

Prova a descrivere una cena in un riferimento in volo libero...

Prova a descrivere una cena in un riferimento nello spazio vuoto (ossia lontanissimo da ogni pianeta).

Cosa abbiamo imparato dai precedenti esperimenti? Pare che in un riferimento in volo libero l'acqua non cada, le tavolette non poggino più sulla tavola più grande, i fili dei pendoli non siano più tesi... Da tutto ciò possiamo concludere che in un riferimento in volo libero la gravità si cancella?

Vediamo un'ulteriore prova di ciò: la Terra è un riferimento in volo libero sul Sole; hai mai osservato deflessioni dalla verticale di pendoli o gravi in caduta libera?

Rispondi dopo aver discusso i seguenti problemi.

Problema 1:

La Terra è un sistema in volo libero sul Sole. Se l'accelerazione esercitata dal Sole non si cancellasse, cosa accadrebbe a una pallina lasciata cadere dalla torre di Pisa al sorgere del Sole la mattina del 20 marzo 2004 (equinozio di primavera)? E al tramonto del Sole dello stesso giorno?

Massa del Sole $2 \cdot 10^{30}$ kg;

distanza Terra-Sole $1.5 \cdot 10^{11}$ m;

altezza della torre di Pisa 55 m.

Questione 1:

Se l'accelerazione esercitata dal Sole non si cancellasse, cosa accadrebbe a un pendolo in equilibrio durante una giornata? I muratori potrebbero usare il filo a piombo per costruire muri dritti?

Da tutto quanto detto finora possiamo trarre la seguente conclusione: in un riferimento in volo libero sembra che la gravità si cancelli.

Dunque un riferimento in volo libero sembra equivalente a un riferimento nello spazio vuoto.

Più avanti torneremo su questo punto per chiarire cosa intende Einstein quando puntualizza che il campo gravitazionale si cancella "almeno nelle sue immediate vicinanze... "

Esempi di riferimenti:

a) Un'astronave nello spazio vuoto.

b) Questa stanza.

c) Una giostra.

d) Una grande nave spaziale.

e) Una piccola nave spaziale.

Quali tra i riferimenti sopra elencati sono in volo libero e quali no?

I seguenti problemi ci aiuteranno a capire meglio i riferimenti in volo libero.

Problema 2:

In un ascensore in volo libero si può misurare la massa di un corpo? Se sì, come?

Problema 3 (Dal *Taylor–Wheeler*): Dalla Terra alla Luna.

Jules Verne verso il 1865 iniziò a scrivere il romanzo *Dalla Terra alla Luna*. La storia racconta che esperti progettisti di cannoni inseriscono un cannone in un pozzo, con l'imboccatura verso l'alto. Da questo cannone essi sparano un proiettile di circa 10 tonnellate che contiene tre uomini e diversi animali. Verne racconta che durante la prima fase del viaggio, quando la gravità esercitata dalla Terra è maggiore di quella esercitata dalla Luna, i passeggeri camminavano normalmente calpestando la parte del pavimento più vicina alla Terra. Mentre il viaggio prosegue, i passeggeri si trovano sempre meno premuti contro il pavimento e, nel punto in cui la Terra e la Luna esercitano attrazioni gravitazionali uguali (ma di verso opposto), i passeggeri galleggiano. Più tardi essi iniziano ancora una volta a camminare, ma questa volta calpestano la parte del veicolo più vicina alla Luna.

Durante la prima parte del viaggio, un cane dell'equipaggio muore per le ferite riportate durante il lancio. I passeggeri si liberano dei suoi resti gettandoli fuori dalla navicella. Scoprono che il corpo rimane a fluttuare fuori dall'oblò per tutto il resto del viaggio.

Verne aveva una conoscenza corretta della Fisica? Spiegate.

Problema 4: Dalla Terra … alla Terra.

Quello che non racconta il romanzo è che, poco dopo, fu costruito un altro dispositivo come quello descritto da Verne. E il dispositivo fu utilizzato per mandare alcuni astronauti sulla Luna, ma qualcosa non funzionò: la navicella fu lanciata ma … ricadde sulla Terra.

1. Mentre la navicella stava ancora salendo, si narra che un astronauta saltò sul pavimento. Che cosa gli sarà successo?

a) Sarà ricaduto sul pavimento della navicella?

b) avrà colpito il soffitto?

c) sarà successo qualcosa di diverso?

2. Un altro astronauta saltò, ma quando la navicella era passata oltre il punto più elevato della sua traiettoria. La tua risposta al punto 1 è diversa in questo caso?

3. Come avranno fatto gli astronauti a riconoscere l'istante in cui la navicella raggiunse il punto più alto della sua traiettoria?

Problema 5: Massa o peso?

In una trasmissione televisiva a carattere divulgativo su questioni di Astronomia si assiste alla seguente scena: il conduttore si trova su un pianeta, chiamiamolo pianeta X; dalle immagini sembra simile alla Luna, solo molto più piccolo. Il diametro sembra di circa 100 m.

Il conduttore sostiene che, essendo il pianeta X estremamente piccolo, il campo gravitazionale è trascurabile e che, per questo motivo, si possono, con facilità, sollevare locomotive. La scena mostra il conduttore che alza e abbassa una locomotiva con la stessa facilità con cui, sulla Terra, si alza un libro.

Alessandro e Gabriele hanno assistito alla trasmissione e discutono sulla credibilità della scena.

Alessandro sostiene che, poiché il campo gravitazionale sulla superficie del pianeta X è piccolo, la locomotiva ha un piccolo peso. Ne deduce che la scena è credibile.

Gabriele sostiene che non si tratta di peso, ma di massa: per accelerare un corpo è necessario imprimergli una forza e l'accelerazione è il rapporto tra la forza e la massa. Poiché la locomotiva ha massa molto grande, l'accelerazione è decisamente piccola. Da questo deduce che neppure sul pianeta X (o in un ascensore in volo libero) le locomotive possono essere sollevate con facilità.

Chi ha ragione? Prima di prendere una decisione fai un po' di calcoli.

a) Calcola il campo gravitazionale sulla superficie del pianeta X; supponi che la densità del pianeta sia la stessa della Luna. (Massa della Luna: $7.4 \cdot 10^{22}$ kg; diametro della Luna: $3.5 \cdot 10^3$ km.

b) Calcola il peso della locomotiva sul pianeta X (la massa di una locomotiva è di circa 10^4 kg). Confronta il peso trovato con quello di un libro sulla Terra.

c) Supponi che un atleta sia capace di applicare una forza di 1000 N per qualche minuto: quanto tempo impiegherebbe per sollevare la locomotiva di 2 metri?

d) Una volta sollevata la locomotiva a due metri, l'atleta vorrebbe tenerla ferma a quell'altezza: ci potrebbe riuscire? Come?

Confronta la velocità della locomotiva dopo che è stata sollevata di 2 m con la velocità di fuga dal pianeta.

Ora decidi: chi, tra i due ragazzi, ha ragione?

Problema 6 (Olimpiadi della Fisica):

Una persona si trova in una cabina di un ascensore che sta precipitando con l'accelerazione costante di caduta libera, g. Se quella persona lanciasse una pallina di gomma verso il soffitto della cabina potrebbe osservare che:

A la pallina non si solleva verso il soffitto, ma rimane ferma a una distanza costante dal pavimento

B la pallina raggiunge il soffitto della cabina e si ferma

C la pallina non si solleva ma scende verso il pavimento a velocità costante

D la pallina sale, urta il soffitto, e quindi scende verso il pavimento a velocità costante

E la pallina sale, urta il soffitto, e quindi scende verso il pavimento a velocità sempre più alta.

Problema 7:

Giulia e Patrizia discutono sulla seguente questione di Fisica. Giulia sostiene che, se l'accelerazione esercitata dal Sole non si cancellasse, il filo a piombo cambierebbe direzione nell'arco della giornata. Patrizia sostiene che l'affermazione di Giulia è falsa.

Per convincere Patrizia, Giulia fa il seguente ragionamento che scrive in un appunto ... sfortunatamente incompleto.

"Il prossimo 20 marzo, al sorgere del Sole, se l'accelerazione esercitata dal Sole non si cancellasse, il filo a piombo defletterebbe verso _____ formando un angolo di _____ rispetto alla verticale, mentre al tramonto defletterebbe verso _____ formando un angolo di _____ rispetto alla verticale."

Chi ha ragione? Giustifica la risposta e, se dai ragione a Giulia, completa l'appunto. (L'accelerazione esercitata dal Sole sulla Terra è $6 \cdot 10^{-3}$ m/s^2.)

Il principio di relatività

"SALVIATI: [...] Riserratevi con qualche amico nella maggiore stanza che sia sotto coverta di alcun gran navilio, e quivi fate d'aver mosche, farfalle e simili animaletti volanti; siavi anco un gran vaso d'acqua, e dentrovi de' pescetti; sospendasi anco in alto qualche secchiello, che a goccia a goccia vadia versando dell'acqua in un altro vaso di angusta bocca, che sia posto a basso: e stando la nave ferma, osservate diligentemente come quelli animaletti volanti con pari velocità vanno verso tutte le parti della stanza; i pesci si vedranno notar indifferentemente per tutti i versi; le stille cadenti entreranno nel vaso sottoposto; e voi, gettando all'amico alcuna cosa, non più gagliardamente la dovrete gettare verso quella parte che verso questa, quando le lontananze sieno uguali; e saltando voi, come si dice, a pié giunti, equali spazii passerete verso tutte le parti. Osservate che avrete diligentemente tutte queste cose, benché niun dubbio ci sia che mentre il vassello sta fermo non debbano succeder così, fate muover la nave con quanta si voglia velocità; ché (pur che il moto sia uniforme e non fluttuante in qua e in là) voi non riconoscerete una minima mutazione in tutti li nominati effetti, né da alcuno di quelli potrete comprender se la nave cammina o pure sta ferma: voi saltando passerete nel tavolato i medesimi spazii che prima, né, perché la nave si muova velocissimamente, farete maggiori salti verso la poppa che verso la prua, benché, nel tempo che voi state in aria, il tavolato sottopostovi scorra verso la parte contraria al vostro salto; e gettando alcuna cosa al compagno, non con più forza bisognerà tirarla, per arrivarlo, se egli sarà verso la prua e voi verso la poppa, che se voi fuste situati per l'opposito; le gocciole cadranno come prima nel vaso inferiore, senza caderne pur una verso la poppa, benché, mentre la gocciola è per aria, la nave scorra molti palmi; i pesci nella loro acqua non con più fatica noteranno verso la precedente che la susseguente parte del vaso, ma con pari agevolezza verranno al cibo posto su qualsivoglia luogo dell'orlo del vaso; e finalmente le farfalle e le mosche continueranno i lor voli indifferentemente verso tutte le parti, né mai accaderà che si riduchino verso la parete che riguarda la poppa, quasi che fussero stracche in tener dietro al veloce corso della nave, dalla quale per lungo tempo, trattenendosi per aria, saranno state separate. [...]"

Quello che scrive Galileo sembra semplice. Proviamo a cercare, tra le esperienze che sicuramente abbiamo fatto, viaggi in treno, aereo o nave, fatti che ci permettano di capire meglio ciò che abbiamo letto.

Problema 1: Strane colazioni.

Pierino fa solitamente colazione nella sua cucina. Mangia delle fette tostate che prepara con quegli strani tostapane che lanciano in alto le fette pronte. Versa il latte fumante e il caffè nella tazza e insomma fa quello che noi tutti facciamo a colazione. Ora supponi che Pierino faccia la colazione sopra descritta nei riferimenti indicati di seguito:

a) un treno che viaggia a velocità costante su un tratto di binario rettilineo;

b) un camper che viaggia su una strada di montagna;

c) un camper che viaggia in autostrada;

d) un aereo che improvvisamente fa una brusca virata;

e) un aereo al momento del decollo.

Cerca di immaginare cosa succede a Pierino, per esempio, quando versa il latte nella tazza nei vari riferimenti o cosa succede quando il tostapane lancia una fetta pronta.

Sarai d'accordo che in alcuni riferimenti è più comodo fare colazione: in quali?

Problema 2: Le apparenze ingannano...

Vi sarà capitato di vedere la foto di una nave sul mare. Le navi hanno solitamente alberi su cui sventolano bandiere. Supponiamo che le bandiere sventolino verso sinistra.

Analizzando le foto sopra descritte puoi trarre qualche conclusione sul moto della nave? si può capire se è ferma o se si sta movendo verso destra o verso sinistra? Si possono trarre conclusioni diverse?

Spiega la risposta e motivala, se vuoi, con disegni.

Attività 1: Ha ragione Galileo?

Ancora a proposito del brano letto (quello del "gran navilio"). Ha davvero ragione Galileo? Sarà vero che fare salti, lanciare palle, far cadere gocce d'acqua in vasi "d'angusta bocca" non permette di capire se la nave è ferma o se si muove di moto TRU?

Puoi fare la seguente prova: prendi una bottiglia, un bicchiere, un pallone, un bastoncino di incenso e fai un piccolo viaggio in treno (treno, nave o aereo fa lo stesso).

È abbastanza facile che il treno percorra, a velocità costante, un tratto rettilineo. Una volta individuato questo tratto, versa l'acqua nel bicchiere, accendi l'incenso, fai un salto "a pié giunti," e lancia la palla a un tuo compagno quando questo è a un paio di metri da te (una volta verso la testa del treno, un'altra verso la coda e in altre posizioni ancora...).

Ripeti poi tutte le prove a treno fermo, o in sala d'aspetto della stazione o nella tua camera.

Puoi, se hai una telecamera, filmare le prove fatte. Ha ragione Galileo?

Credo che Galileo ci abbia convinti!

Riassumiamo ancora quanto emerge dal brano: mettetevi in una stanza sotto coperta di una nave e saltate, giocate, fate quello che vi pare, da ciò non riuscirete a capire se la nave sta ferma o cammina di moto TRU.

In altre parole: voi state dentro una nave o dentro un vagone ferroviario o dentro un'astronave. Bene, se la nave o il treno o l'astronave si muovono di moto TRU, non ve ne accorgete!

Volendo esprimere questo in termini moderni, si può dare un enunciato che contiene tutto quello che Galileo dice:

Nessun esperimento consente di distinguere due riferimenti in moto TRU.

Chiameremo questo postulato *Principio di Relatività* (PR).

Altro enunciato:

C'è un altro modo utile per enunciare il PR, facile da ricordare e di valore pratico: lo chiameremo il *Principio del Taccuino.* In ogni laboratorio di fisica che si rispetti c'è un quaderno in cui il fisico annota i risultati degli esperimenti, ma più in generale tutto quello che accade.

Il principio del taccuino dice:

se due fisici A *e* B *fanno esperimenti in due diversi riferimenti in moto* TRU,
non è possibile riconoscere A *da* B *con la sola lettura dei loro taccuini.*

Notate che non è detto che i due fisici facciano gli stessi esperimenti o che ottengano gli stessi valori numerici!

Einstein e il principio di relatività

Vediamo cosa scrive Albert Einstein nel 1905:

> "Esempi di questo genere [...] portano all'ipotesi che al concetto di quiete assoluta non corrisponda alcuna proprietà dei fenomeni fisici; e ciò non solo nella meccanica, ma anche nell'elettrodinamica. Al contrario, per tutti i riferimenti per i quali valgono le equazioni della meccanica, valgono pure le stesse equazioni elettrodinamiche e ottiche [...] Intendiamo perciò elevare quest'ipotesi (il cui contenuto verrà chiamato nel seguito "principio della relatività") al rango di postulato [...]."

Ripetiamo con altre parole quello che scrive Einstein: fate pure qualunque esperimento, saltate, giocate o fate quello che vi pare, nulla vi consentirà di capire se siete in quiete o se vi muovete di moto TRU.

Ma questo è quello che ci ha detto Galileo! Ma allora perché Einstein lo riscrive?

Il fatto nuovo era rappresentato dalle scoperte di Maxwell: vediamo di che si tratta.

Maxwell nel 1870 elabora una teoria che, in quattro leggi, sintetizza i fenomeni elettromagnetici.

Tale teoria prevede l'esistenza delle onde elettromagnetiche, di cui sicuramente avrai sentito parlare, e prevede anche la velocità di queste onde nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Nota che c è la velocità della luce nel vuoto.

Verso il 1890 Hertz e Righi mostrano sperimentalmente che le onde elettromagnetiche esistono e nel 1905 sono già di uso pratico; infatti Marconi già da qualche anno ha realizzato i primi esperimenti di radiotelegrafia.

Tutta questa premessa ti farà un po' sorridere; spiegare a un ragazzo, nel 2005, che esistono le onde elettromagnetiche è fin troppo facile, pensa a tutti gli strumenti che usi e che utilizzano le onde elettromagnetiche: radio, televisione, telefonino, radar, eccetera. Tutto ciò conferma abbondantemente la teoria di Maxwell, ma pone un problema: tale teoria prevede l'esistenza delle onde e.m., compresa la loro velocità $= c$, ma rispetto a quale riferimento?

Risposta 1: rispetto a un riferimento privilegiato (chiamiamolo "etere"). Ma allora il Principio di Relatività non vale: infatti, misurando la velocità della luce mi posso accorgere se sono fermo o no rispetto all'etere.

Risposta 2: la velocità delle onde e.m. nel vuoto è una costante universale e quindi è la stessa in tutti i riferimenti inerziali.

Einstein sceglie la risposta 2, altri fisici scelsero la risposta 1. Tuttavia in fisica esiste la possibilità di stabilire inequivocabilmente chi ha ragione: basta interrogare la natura.

Riassumendo, Einstein (1905) ipotizza che:

1: *Vale il principio di relatività generalizzato a tutti i fenomeni fisici.*

2: *La velocità della luce nel vuoto è una costante universale.*

Vedremo quali sono le prove sperimentali a sostegno della scelta di Einstein.

In particolare utilizzeremo il GPS, i mesoni come orologi e le sonde spaziali.

Ma prima studieremo il funzionamento di uno strano orologio: l'orologio a luce e scopriremo cose piuttosto strane... In sostanza assumeremo come veri i due postulati di Einstein, ne trarremo alcune conseguenze e poi, come sempre, interrogheremo la natura e, nel caso di scoperta di cose strane secondo i nostri pregiudizi, ma confermate dagli esperimenti, saremo costretti a cambiare modo di pensare.

Risolviamo ora i seguenti problemi.

Problema 3: Salti in treno (a pié giunti)

Un ragazzo salta verso l'alto mentre si trova su un treno che viaggia a 100 km/h. Cade sul pavimento nello stesso punto da cui si è lanciato o cade indietro rispetto al verso del moto del treno? (o in avanti?). Uno degli argomenti a favore dell'immobilità della Terra era questo: se fosse vero che la Terra ruota, saltando dovremmo rimanere indietro...

Se ciò fosse giusto, di quanto rimarrebbe indietro un ragazzo che salta "a pié giunti" a Lucca?

Supponi che il tempo di volo, ossia il tempo in cui il ragazzo rimane in aria sia di 0.5 s. Il raggio della Terra è di circa 6400 km e la latitudine di Lucca è circa 44°.

Problema 4 (tratto dal PSSC):

In una delle sue opere Galileo disse che un corpo abbandonato a se stesso dalla sommità dell'albero di una nave in moto TRU toccherebbe il ponte in un punto direttamente al di sotto del punto di partenza.

Rappresenta la traiettoria che il corpo percorrerebbe nel riferimento:

a) della nave

b) di un osservatore situato su una boa.

Problema 5:

Due laboratori si muovono di moto TRU rispetto alle stelle fisse. Sulla base del Principio di Relatività quali delle quantità (o leggi) che compaiono nella seguente lista devono necessariamente essere uguali quando vengono misurate nei due riferimenti e quali non è detto che debbano essere uguali?

a) Valore numerico della velocità di una cometa.

b) Velocità di un elettrone.

c) Prima legge di Newton.

d) Carica di un elettrone.

e) Energia cinetica di un elettrone.

Problema 6:

Sulla "mailing list" *Sagredo* il Professor Elio Fabri ha proposto la seguente questione: "Giorni fa dal mio balcone ho visto a pochi metri da me una rondine che per una frazione di secondo se n'è stata ferma in aria, senza battere le ali. Com'è possibile?"

Rispondete alla domanda.

Attività 2:

Prendi una bilancia, di quelle che utilizziamo in casa per controllare il peso e prova a pesarti su un ascensore.

Stai attento a cosa succede quando l'ascensore parte, quando stabilizza la velocità e quando frena (che peso leggi?).

Conclusione

A titolo di conclusione, due brevi commenti: il primo sulla cosmologia, il secondo sul problema più generale dell'insegnamento della relatività.

1. Dai sommari accenni che sono stati fatti alla cosmologia nelle ultime tre lezioni, spero risulti chiaro un fatto: come accade sempre, man mano che si arriva a capire cose che pochi decenni fa sembravano fuori della nostra portata, si affacciano nuovi problemi, la cui esistenza non toglie però valore al lavoro precedente. Una corretta valutazione di questi aspetti epistemologici mi pare indispensabile quando ci si appresta a una traduzione didattica, per evitare facili errori:

– dogmatismo (le cose stanno così perché lo dicono gli scienziati)
– riduzione della scienza a romanzo (parlare di un mucchio di cose che non si capiscono, ma sono "avanzate")
– relativismo confusionario (fare un gran minestrone, e condirlo con la "perdita della certezza scientifica").

La frequente presenza degli argomenti appena accennati nella divulgazione scientifica e persino nei mass-media, come pure la grande rilevanza che essi hanno per problematiche che vanno al di là del ristretto campo scientifico, mi sembrano motivazioni sufficienti per ribadire quanto dicevo introducendo queste lezioni: non è più possibile escludere la materia dall'insegnamento secondario, ma al tempo stesso è indispensabile che essa venga presentata in modo scientificamente corretto.

2. Non è possibile chiudere questo ciclo di lezioni senza discutere come e quanto sia possibile inserire la relatività nell'insegnamento della fisica nella s.s.s. Sono il primo a sapere che l'idea di mettere tutta questa materia dentro il normale orario fa spavento. Anche a prescindere dalla difficoltà, ci si chiede per forza quante ore ci vogliono. Tempo e difficoltà sono due aspetti distinti, anche se non indipendenti.

Perciò il problema del tempo disponibile va discusso per bene, anche se credo di avervi già detto fin dai primissimi incontri che si riduce un po' se si è capaci d'impostare tutto l'insegnamento della fisica in modo adeguato. Ci sono certe parti della fisica che fin dall'inizio devono preparare questi discorsi. Non si può prendere la relatività e metterla in fondo, dicendo "adesso facciamo relatività," mentre prima si sono dette cose che c'entravano poco o niente: andrebbe ripensato un po' tutto l'insegnamento della fisica. Ma questo è vero non solo per la relatività: è vero per tutta la cosiddetta "fisica moderna." O uno non la fa, o se la fa non può ricordarsene solo alla fine.

A monte di tutto ciò c'è un'altra questione di cui mi piacerebbe discutere, perché se ne discute estremamente poco: *perché* insegnare la relatività (o più in generale, la fisica moderna)? Se non si ha chiaro l'obiettivo, come si fa a decidere quanto spazio dare? Ma purtroppo non è un problema che possiamo affrontare in questa sede.

Ciò che trovo spiacevole è che il problema non sia assolutamente sentito ai livelli più alti, tanto politici quanto di cultura. Non si può semplicemente dire agli insegnanti: dovete "fare" la relatività. Ma perché? a quale fine? Perché è bello, è moderno, è importante; non si può fare a meno di saperla. *Chi* la deve sapere? Tutti? qualcuno? E se solo qualcuno, chi? Bisogna che l'istituzione scolastica, la scuola italiana sappia che cosa vuole: anche a proposito di relatività. La risposta frequente e sbrigativa che bisogna dare "qualche idea" di relatività (e più in generale di fisica moderna) a me sembra priva di senso. Ma una risposta seria purtroppo al momento non c'è.

Nota 2005: e continua a non esserci...